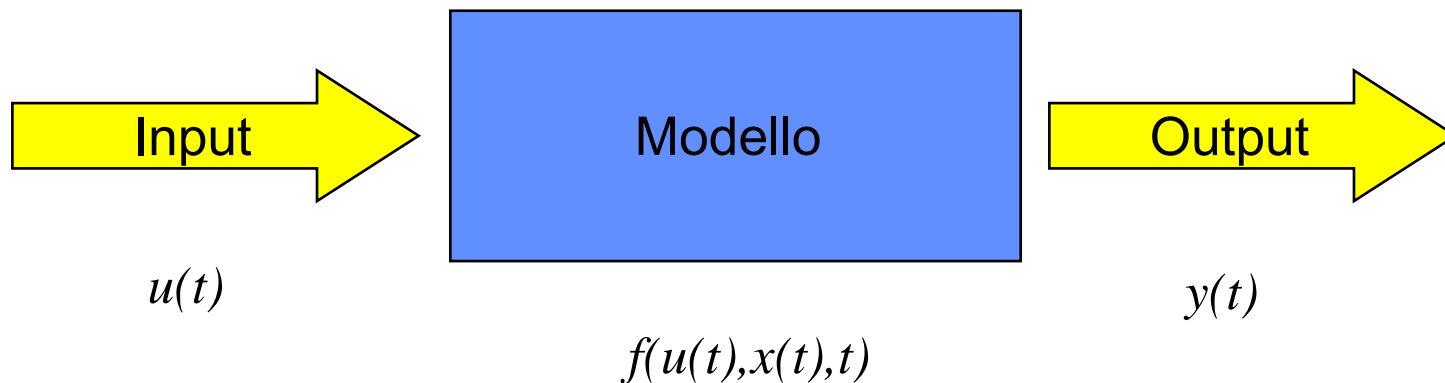

Concetti base di Modellistica

Criteri fondamentali
per la costruzione e l'uso
di modelli matematici



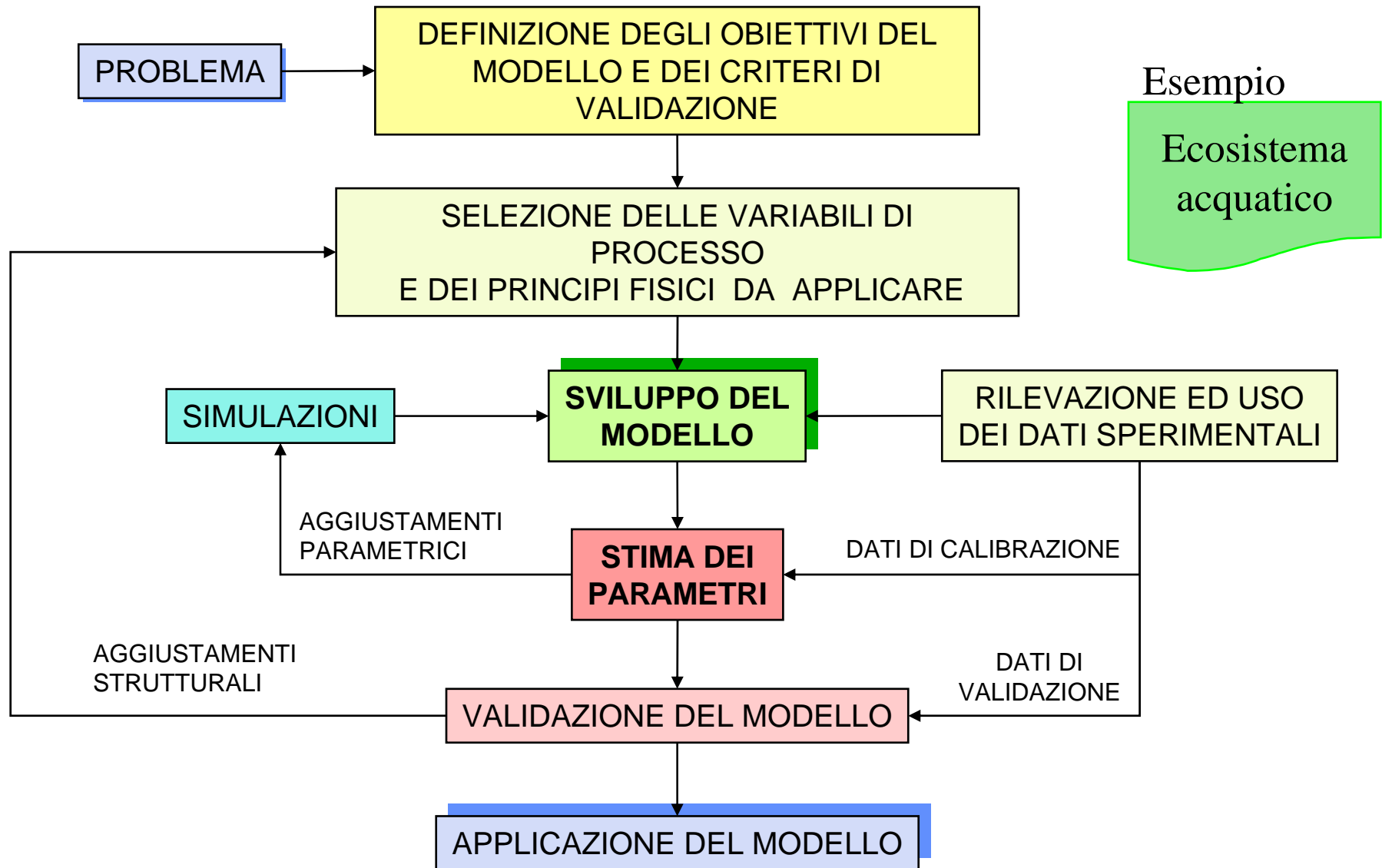
Cos'è un Modello ?

- Un modello è una rappresentazione **QUALITATIVA** e **QUANTITATIVA** di un sistema (*impianto depurazione, ecosistema acquatico, ecosistema terrestre, processo chimico, etc*) basata su relazioni matematiche.

Si costruiscono modelli per:

- **Comprendere** il funzionamento e la struttura interna di un sistema
- **Programmare** campagne di raccolta dati o posizionare sensori
- **Gestire** il sistema (interventi di controllo) chiamato anche DSS
Decision support system

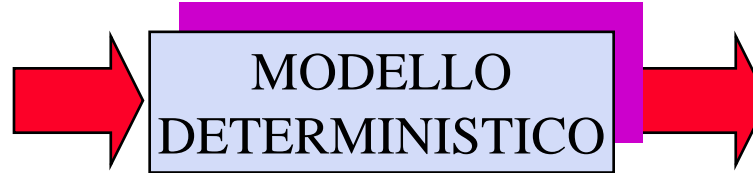
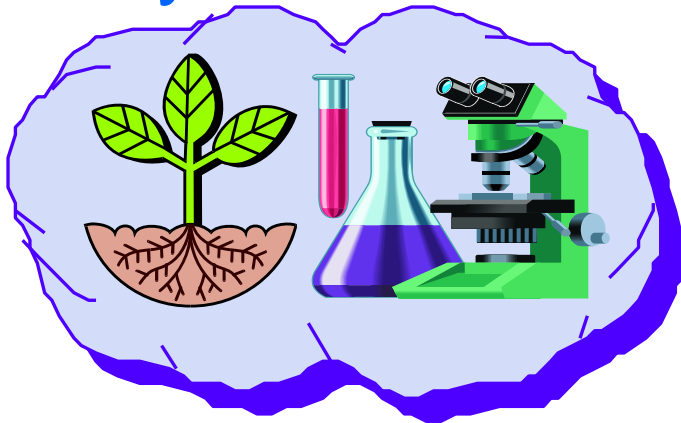
Costruzione di un modello



Dati contro Teoria

Theory-driven Models

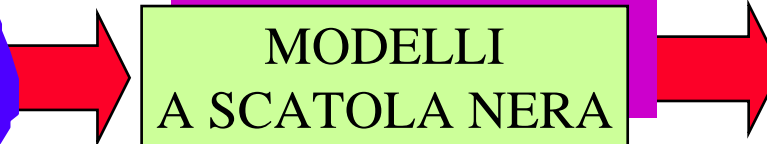
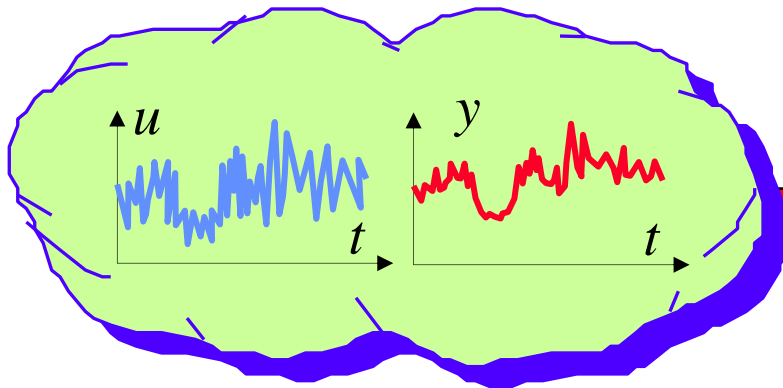
Le equazioni del modello sono determinate in base alla conoscenza di leggi naturali



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Data-driven Models

Le equazioni del modello hanno una struttura predeterminata con dei parametri per l'adattamento ai dati

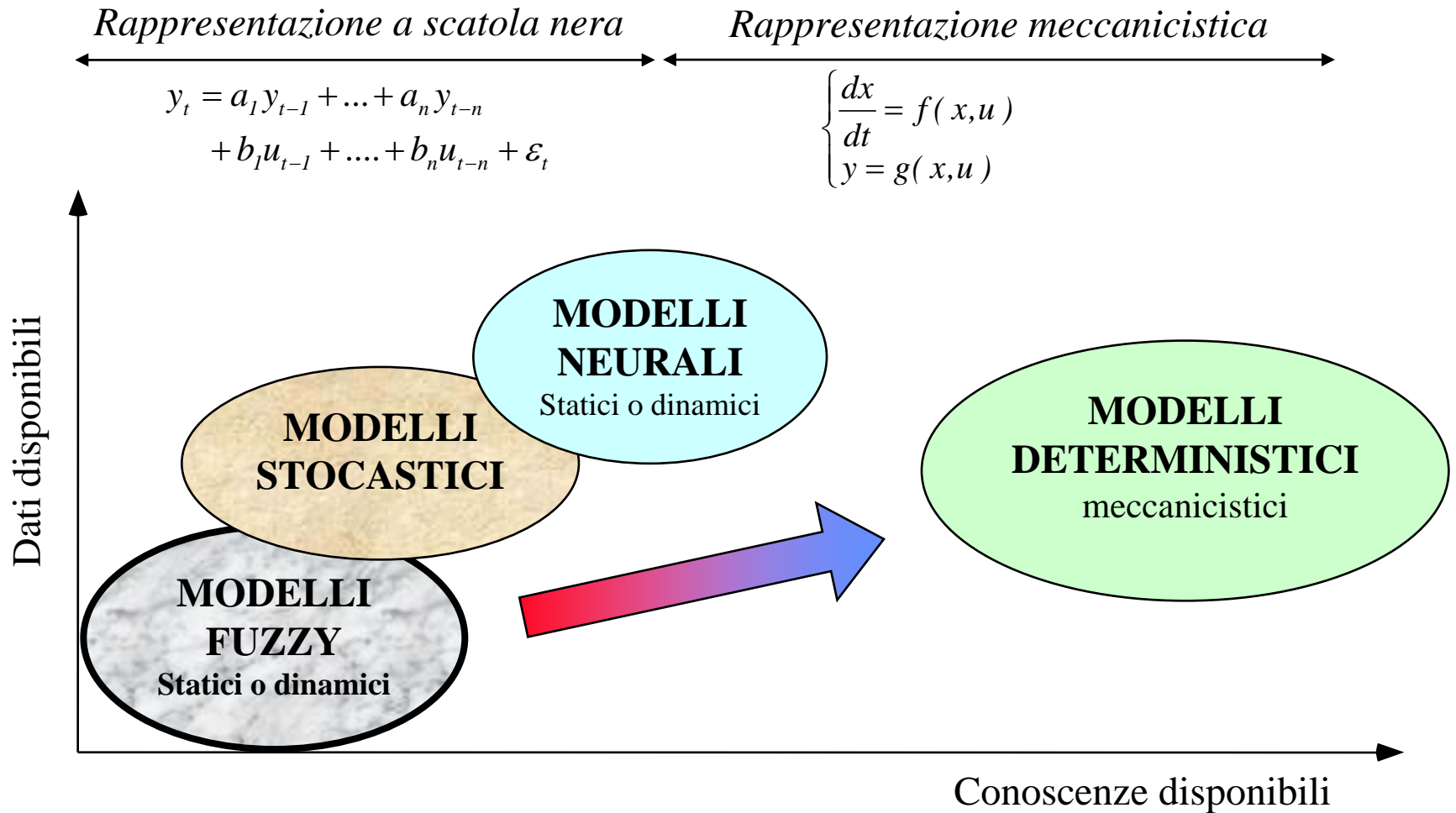


MODELLI STOCASTICI

MODELLI FUZZY

RETI NEURALI

Tipi di Modelli Numerici



Esiste una linea di tendenza principale pressoché diagonale nel diagrammi delle disponibilità (conoscenze e dati).

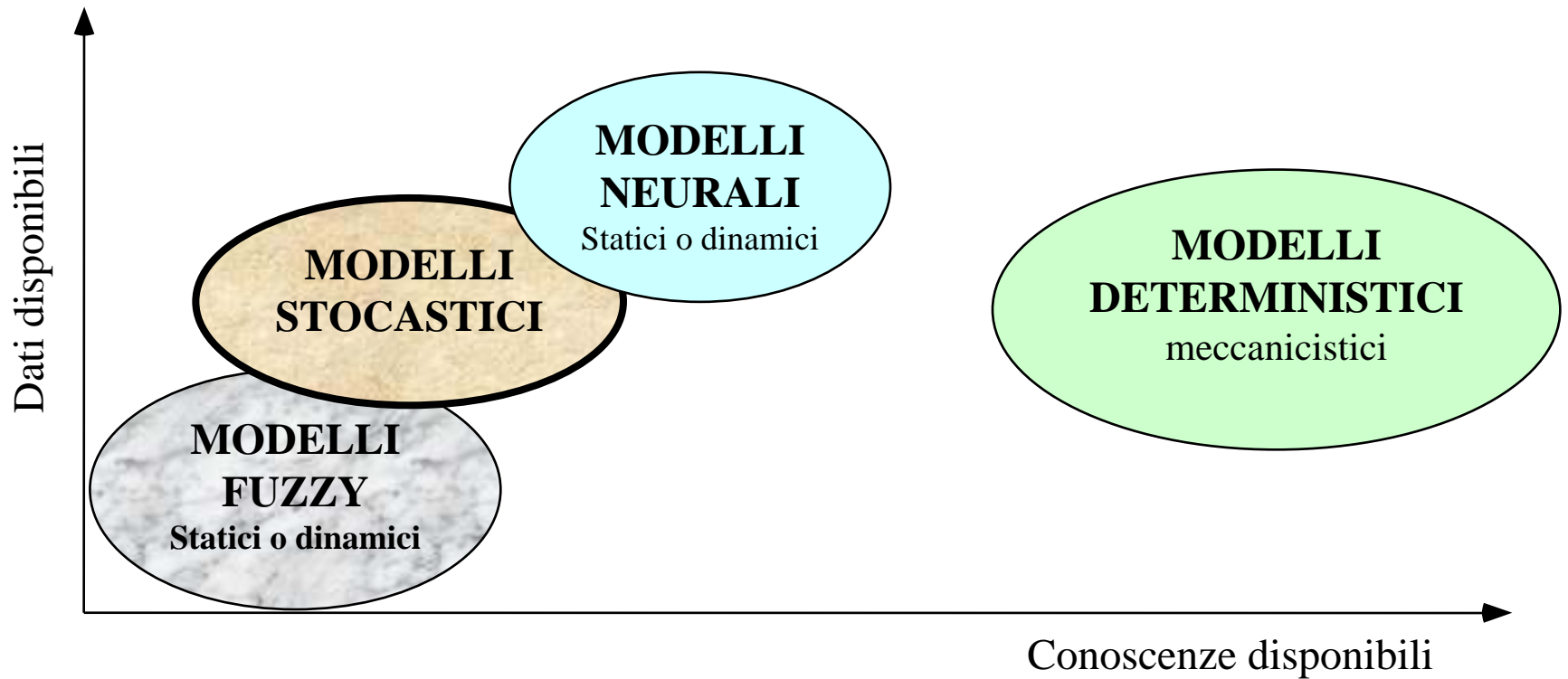
Modelli Fuzzy

- Permettono il trattamento di concetti definiti in forma “discorsiva” (Es. Alto, Basso, Molto, Poco...)
- Sono basati su “ragionamenti” logico-deduttivi basati su categorie “sfumate”
- Sono formati da una serie di “regole” del tipo

IF $\underbrace{\langle \text{accade questo} \rangle}_{\text{antecedente}}$ *THEN* $\underbrace{\langle \text{è vero questo} \rangle}_{\text{conseguente}}$

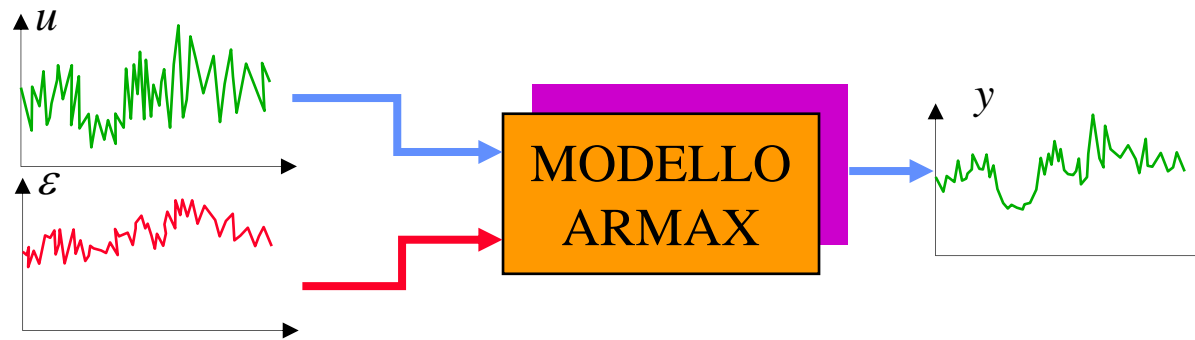
- Ciascuna proposizione non è o VERA o FALSA, ma il suo grado di verità $\mu(x)$ può variare con continuità da 0 (falsa) a 1 (vera)
- Per sviluppare i ragionamenti fuzzy ci si serve di un'algebra fuzzy per “incrociare” i vari gradi di verità $\mu(x)$
- Il risultato è un oggetto fuzzy che deve essere “defuzzificato” per essere comprensibile nel mondo deterministico

Tipi di Modelli Numerici



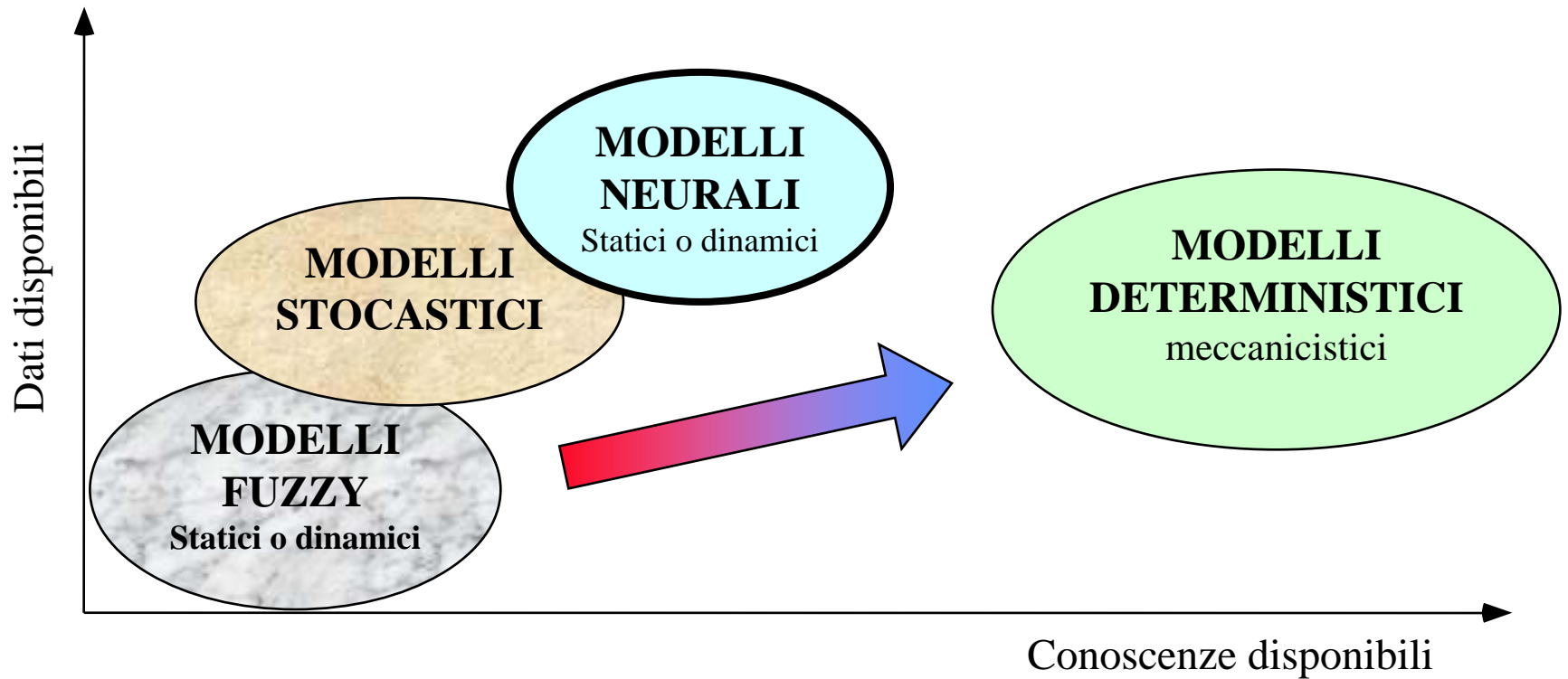
Modello Stocastico

- Riproduce l'andamento temporale dei dati senza fornire informazioni sulla struttura interna del sistema
- Per la sua taratura ha normalmente bisogno di una grande quantità di dati anche se la sua struttura è molto semplice.
- E' vantaggioso quando si desidera ottenere un strumento operativo che riproduca al meglio l'andamento osservato dell'uscita.



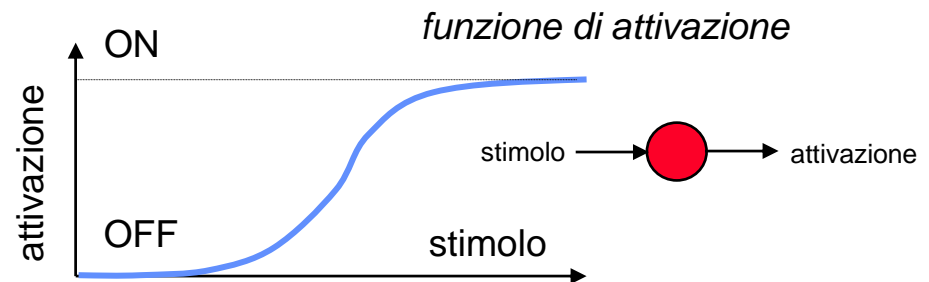
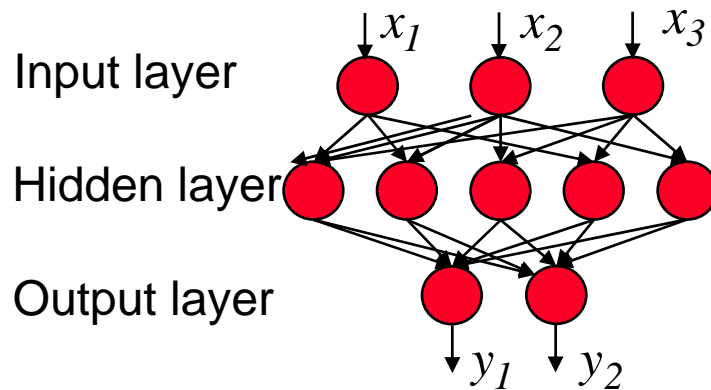
$$y_t = \underbrace{a_1 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n}}_{\text{Parte Auto-Regressiva (AR)}} + \underbrace{b_1 u_{t-1} + \dots + b_m u_{t-m}}_{\text{Ingresso Esogeno (X) deterministico}} + \underbrace{\varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + c_n \varepsilon_{t-n}}_{\text{Parte a Media Mobile (MA) (rumore colorato)}}$$

Tipi di Modelli Numerici



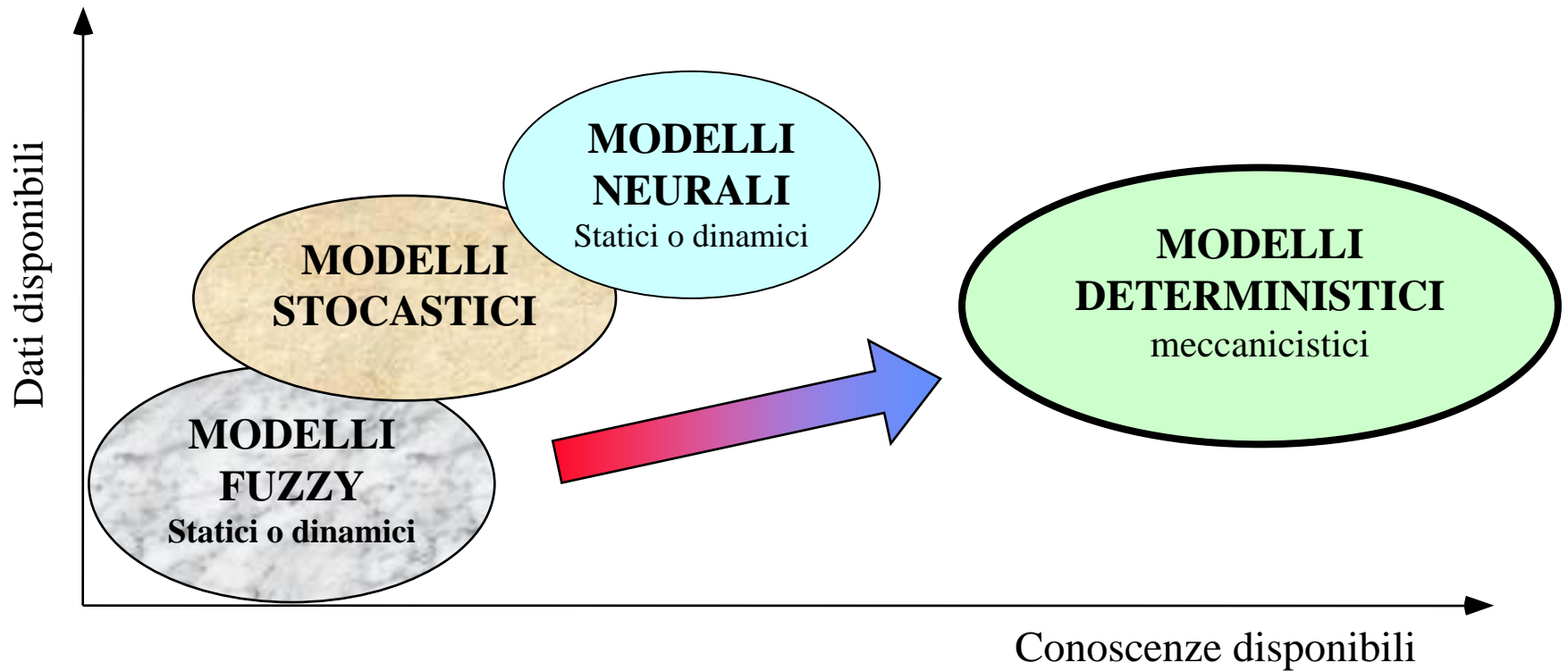
Reti Neurali

- Strutture di calcolo capaci di “apprendere” dei comportamenti sulla base di esempi (allenamento)
- Il funzionamento è basato sull’attivazione di ciascun neurone rispetto ad uno stimolo, secondo una “funzione di attivazione”
- La tipica struttura delle Reti Neurali (Neural Networks) è a tre strati (layers)
 - **Input layer** dal quale entrano le variabili di ingresso
 - **Hidden layer** (Strato nascosto) contenente i neuroni che aggregano le percezioni
 - **Output layer** dal quale si ricavano le variabili di uscita



- E' necessario disporre di un algoritmo di ottimizzazione per l'allenamento della rete, generalmente del tipo back-propagation.

Tipi di Modelli Numerici



Modelli Deterministici

Si basano sempre su conoscenze approfondite delle leggi fondamentali che governano il sistema

➤ *Modello deterministico semplificato*

- Tiene conto delle relazioni fondamentali che stanno alla base del processo.
- Spesso è inutile spingere molto il dettaglio del modello.
- Si sceglie l'aspetto di maggior interesse, trascurando gli aspetti che si ritengono meno rilevanti.

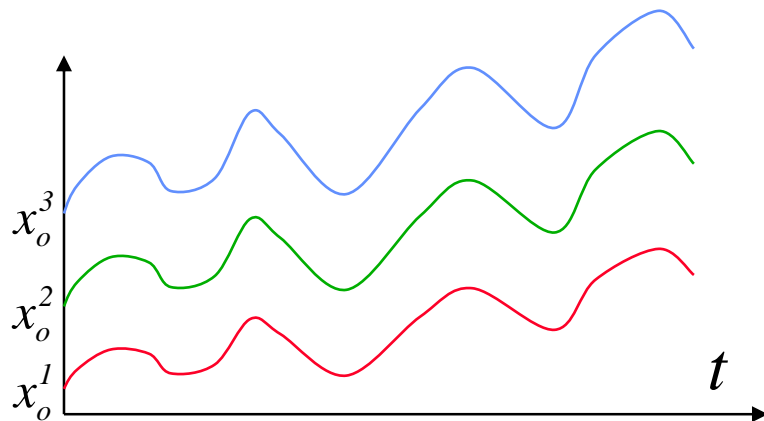
➤ *Modello deterministico complesso*

- E' opportuno solamente quando il grado di dettaglio che esso può fornire è **davvero necessario**.
- La complessità pone molti problemi, sia di sviluppo che di uso, e se **utilizzato impropriamente** può rivelarsi peggiore di un buon modello semplificato usato correttamente.
- La **complessità è spesso soggettiva** ed è legata allo scopo per cui viene costruito il modello.

Autonomia dei vari tipi di modelli

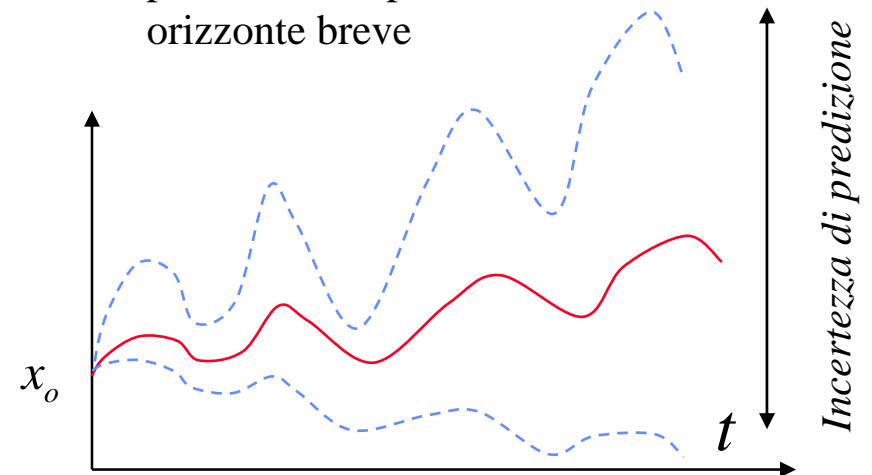
➤ Modelli deterministici

- Solamente i modelli deterministici sono in grado di riprodurre in modo autonomo l'evoluzione del sistema su orizzonti di tempo lunghi
- I parametri del modello hanno significato fisico, collegato alla natura del problema
- Sono gli unici in grado di spiegare il comportamento del sistema in ogni condizione



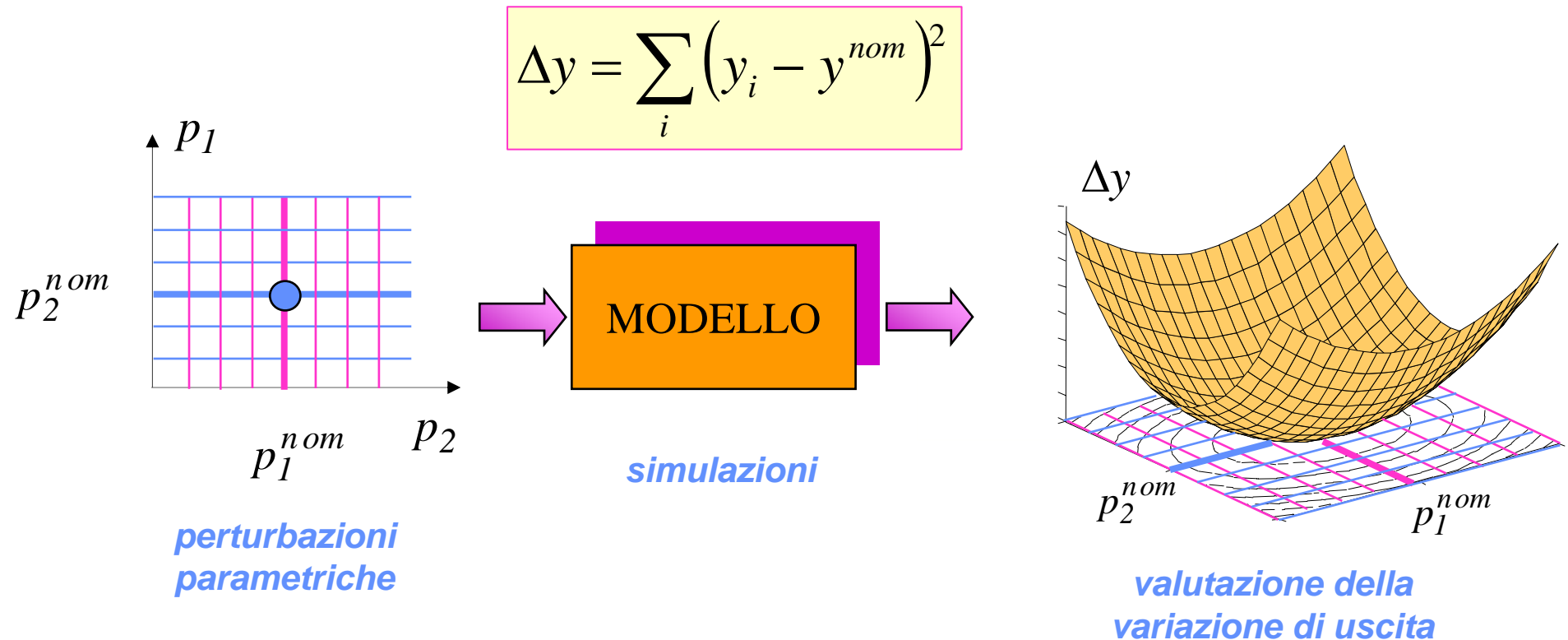
➤ Modelli “incerti” del tipo a “scatola nera” Fuzzy, Stocastici, Neurali

- Approssimano delle serie temporali
- Non identificano la struttura interna del sistema
- Sono molto adatti a rappresentare l'incertezza
- Sono in grado di riprodurre in modo autonomo il comportamento del sistema solamente entro orizzonti di tempo brevi
- Sono molto utili per il controllo, dovendo predire il comportamento del sistema su un orizzonte breve



Sensitivity Analysis

- Variazioni dell'uscita provocate da variazioni dell'ingresso o di un parametro
- Perturbando i parametri o gli ingressi (singolarmente o a coppie) entro una griglia di variazione, si ricava numericamente la funzione di sensitività dell'uscita
- La sensitività si può esprimere come somma degli scarti quadratici fra l'uscita nominale, ottenuta con parametri o ingressi nominali, e quella perturbata



Tipi di modelli

➤ Demografico

- Conservazione dell'Informazione (n° di individui,)

➤ Energetico

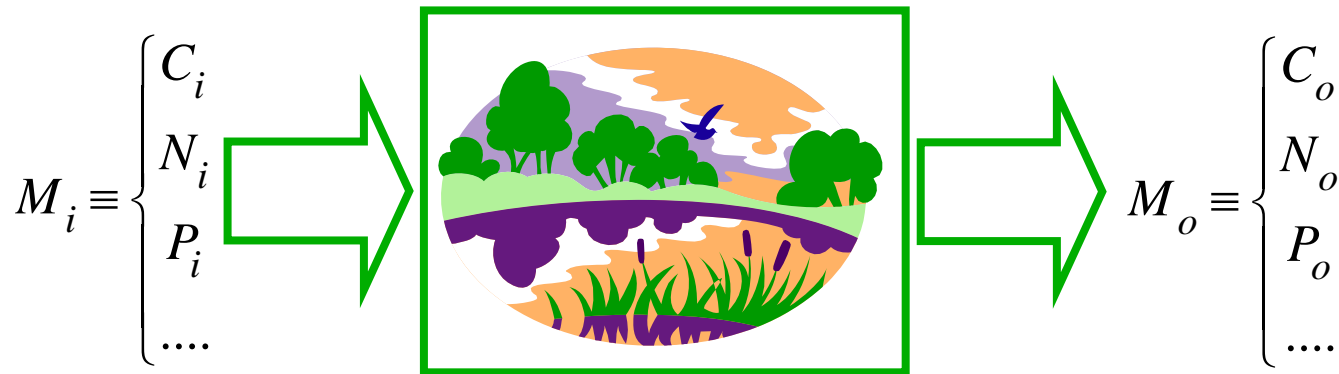
- Conservazione dell'Energia (densità di energia, e.g. J/m^3)

➤ Chimico o ambientale

- Conservazione della Massa (densità di materia, e.g. mg/l)

Modelli ambientali come bilanci

- Esprimono la conservazione della massa entro un particolare ecosistema (*sistema aperto*)



- *Bilancio statico:*

- Pareggio fra masse entranti e uscenti (totale e per componenti) su un lungo periodo, tenendo conto delle trasformazioni interne

- *Bilancio dinamico:*

- Pareggio fra i *ratei* di massa entrante ed uscente (totale e per componenti), tenendo conto delle trasformazioni interne

Modelli Statici

- Indipendenti dal tempo
- Utili per rappresentare valori medi
(*Es. Bilanci energetici in un Ecosistema*)
- Dipendenza *istantanea* fra ingressi, disturbi e uscite
- Relazioni algebriche $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{d})$
- Si basano su:
 - Bilanci statici di massa e di energia
 - Equazioni di equilibrio statico
- Applicazioni: bilanci di massa ed energia in ecosistemi complessi

Modelli Dinamici

- Descrivono il comportamento di grandezze variabili nel tempo
- Necessari per descrivere sistemi bio-energetici che evolvono nel tempo per una propria struttura interna e/o perché soggetti a stimoli esterni tempo-varianti (es. Dinamica delle popolazioni, Flussi energetici in un Ecosistema, etc.)
- Si basano su relazioni differenziali

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U, t)$$

Rateo di variazione di X

Legge di variazione (modello)

Stato del sistema

Ingresso al sistema

Bilanci fondamentali di un ecosistema

Bilancio Statico

- *Bilancio di massa*
 - Il modello deve garantire la *conservazione* della massa
- *Bilancio di energia*
 - Il modello deve tener conto delle *trasformazioni* di energia
- *Orizzonte lungo*

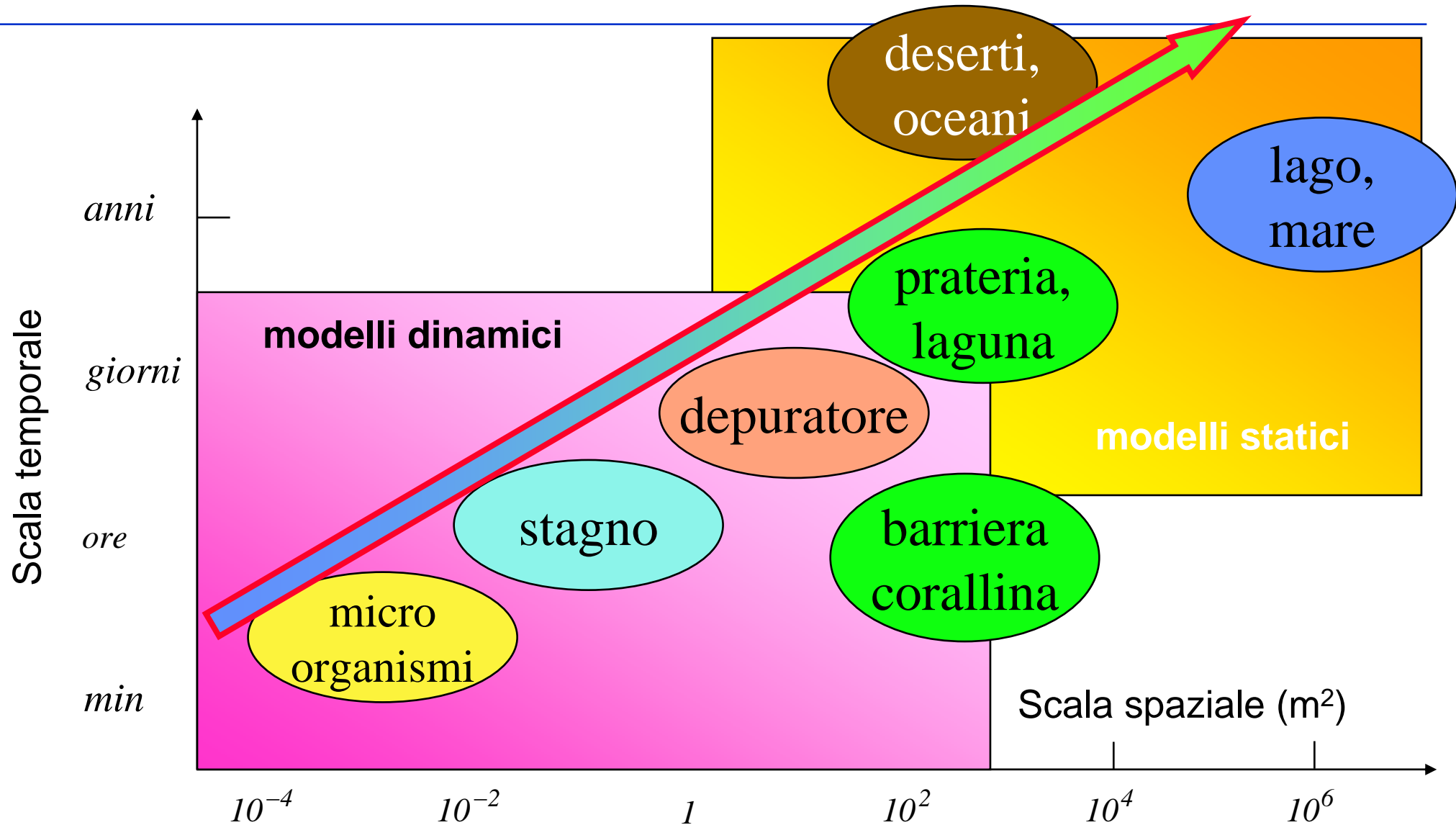
Bilancio Dinamico

- *Variazioni nel tempo*
 - Il modello descrive la *variazione* nel tempo delle variabili di stato, senza riferimento allo spazio
- *Variazioni spazio-temporali*
 - Le *variazione* nel tempo e nello spazio sono collegate fra di loro
- *Orizzonte corto*

Bilanci statici o dinamici?

- Non c'è contraddizione fra i due
 - Bilanci statici
 - Orizzonte lungo
 - Minore dettaglio
 - Maggiore scala Spazio-Tempo
 - Minore informazione richiesta, perché aggregata
 - **Utili quando il sistema è quasi a regime**
 - Bilanci dinamici
 - Orizzonte corto
 - Maggiore dettaglio
 - Minore scala Spazio-Tempo
 - Maggiore informazione richiesta, perché disaggregata
 - **Necessari quando il sistema è soggetto a forti variazioni**

Scala spazio/tempo dei sistemi ambientali



Tipi di Modelli Dinamici

- **Equazioni differenziali ordinarie:** es. dinamica continua delle popolazioni

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P}, t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{X} = \text{vettore delle variabili di stato} \\ \mathbf{U} = \text{vettore delle variabili di ingresso e disturbi} \\ \mathbf{P} = \text{vettore dei parametri} \\ t = \text{tempo} \end{cases}$$

- **Equazioni differenziali parziali:** es. problemi di diffusione degli inquinanti

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k(C) \quad \text{con} \quad \begin{cases} C = \text{Concentrazione} \\ u = \text{velocità di trasporto del fluido} \\ D = \text{coefficiente di dispersione} \\ k(C) = \text{cinetica} \\ t = \text{tempo} \quad x = \text{spazio} \end{cases}$$

- **Equazioni alle differenze:** es. dinamica tempo-discreta delle popolazioni con struttura di età, harvesting, etc.

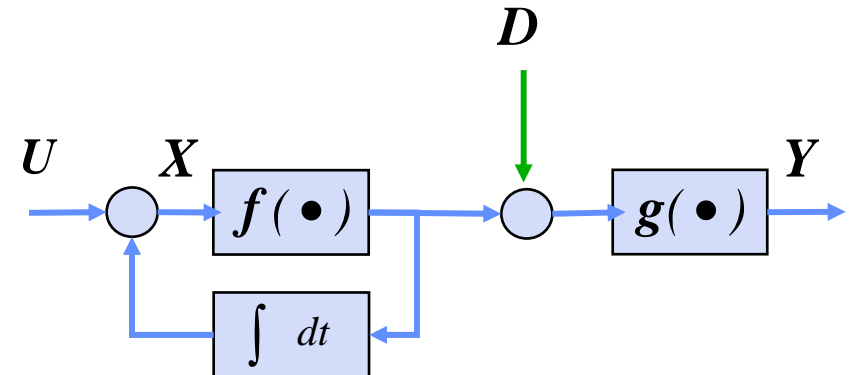
$$y_{t+1} = a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \dots + b_1 u_t + b_2 u_{t-1} + \dots \quad \text{con} \quad \begin{cases} y_{t-i} = \text{uscite passate} \\ u_{t-i} = \text{ingressi passati} \\ a_i = \text{parametri dell' uscita} \\ b_i = \text{parametri dell' ingresso} \\ t = \text{tempo (discreto)} \end{cases}$$

Struttura dei Modelli Dinamici

Determinare un modello dinamico del tipo

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X, U, D, P)$$

$$Y = g(t, X, U, D, P)$$



significa in pratica effettuare le seguenti operazioni:

- 1) individuare le *variabili di stato* \Rightarrow vettore di stato X ;
- 2) individuare gli *ingressi* U , i *disturbi* D e le *uscite* Y ;
- 3) individuare le *funzioni matematiche* $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$
(identificazione strutturale)
- 4) determinare i *parametri* P , cioè le costanti numeriche che compaiono nelle funzioni $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ in modo tale che la risposta del modello sia “quanto più possibile” vicina ai dati osservati sperimentalmente.

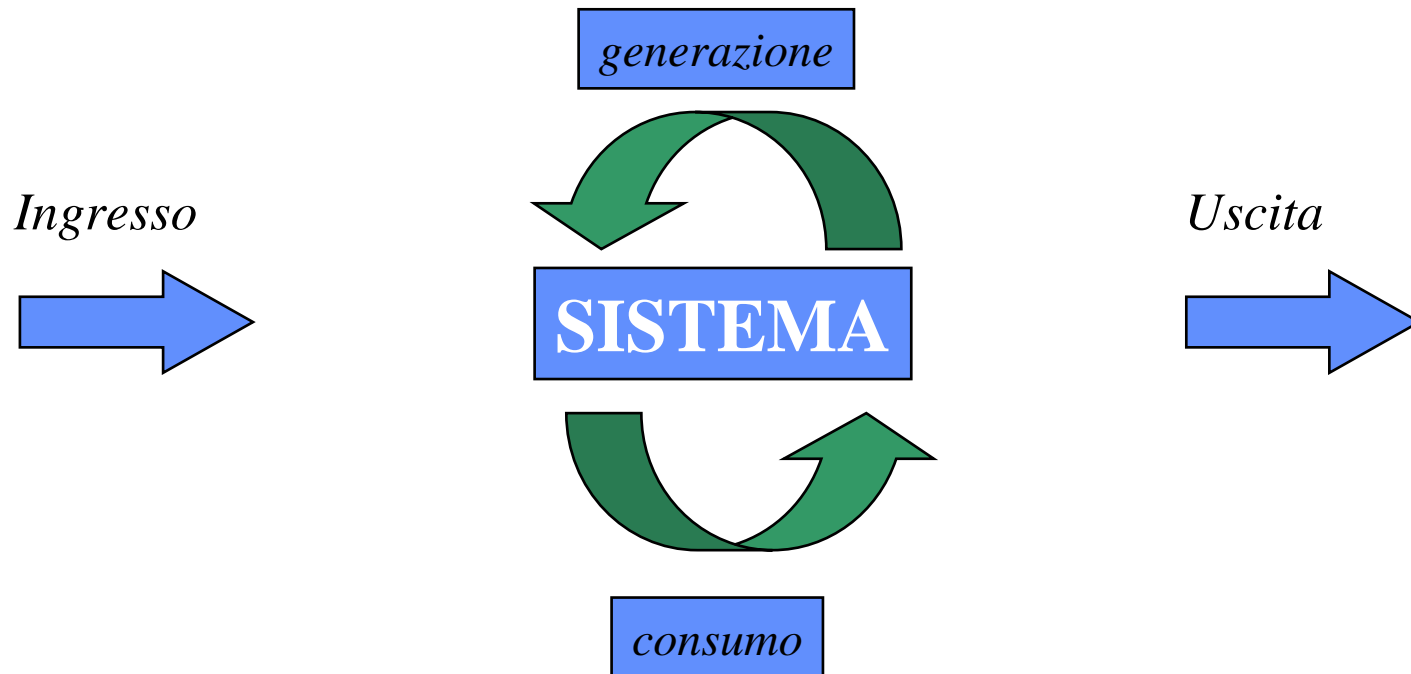
Equazioni Fondamentali di Bilancio

Le equazioni alla base di ogni modello sono dei bilanci di ***conservazione (massa e/o energia)***

$$\text{Accumulo}/\Delta t = \text{Ingresso}/\Delta t - \text{Uscita}/\Delta t + \text{Generazione}/\Delta t - \text{Consumo}/\Delta t$$

Bilanci di rateo:

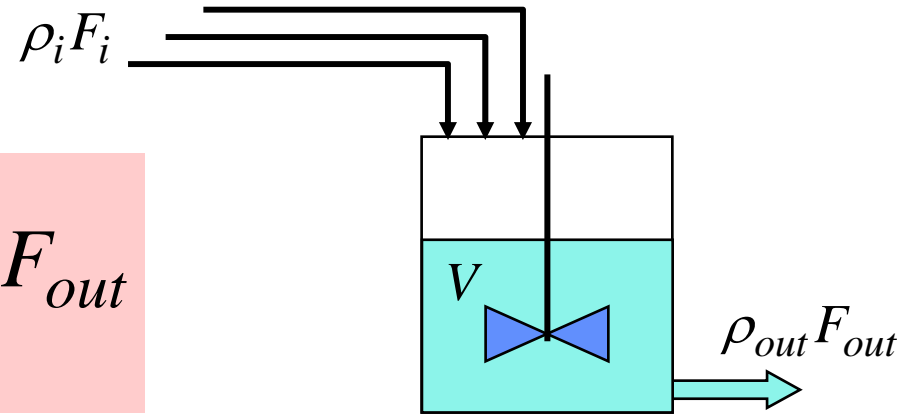
ogni variazione è rapportata all' intervallo di tempo Δt .



Bilanci Fondamentali di Conservazione (I)

➤ Bilancio totale di massa

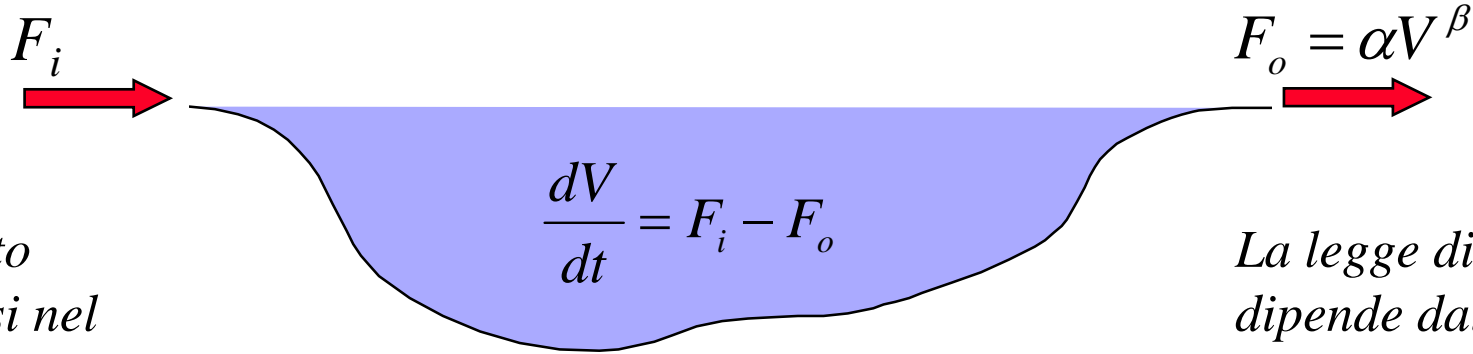
$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i \in \text{ingressi}} \rho_i F_i - \rho_{out} F_{out}$$



- V = volume totale del sistema
- F = portate volumetriche [V / T]
- ρ = peso specifico espresso in [M / V] del fluido di processo.

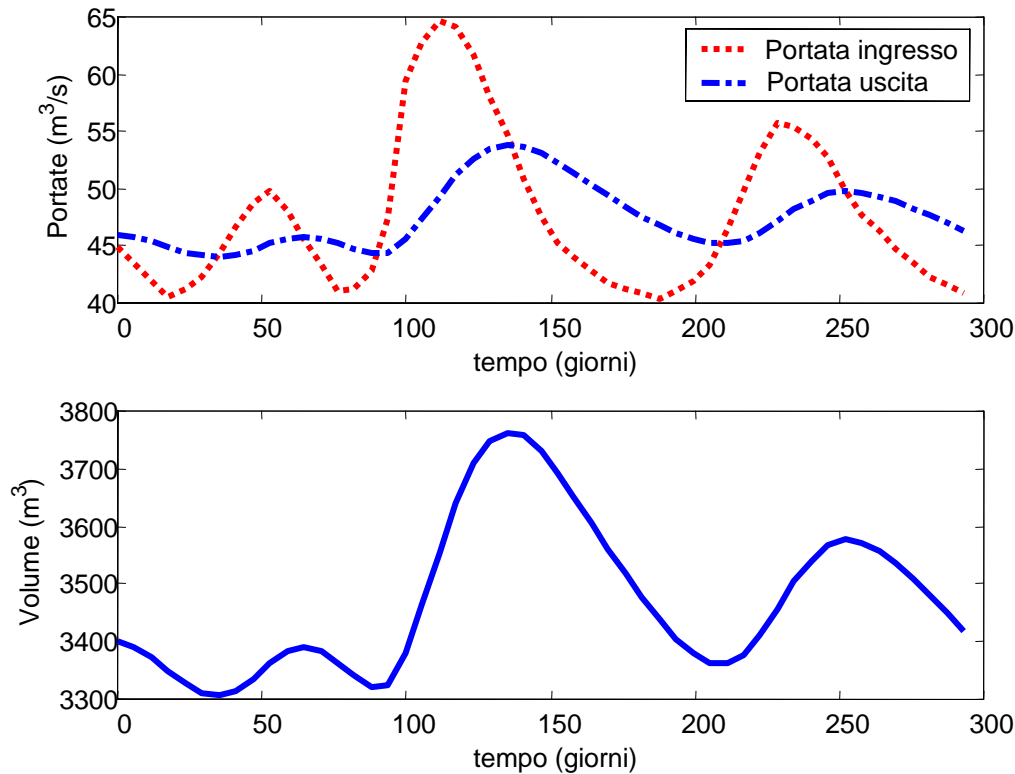


Esempio: bacino idrico



L'andamento degli afflussi nel tempo è determinato dalle caratteristiche del bacino idrografico e costituisce l'ingresso al sistema

La legge di deflusso dipende dalle caratteristiche del bacino e deve essere determinata sperimentalmente

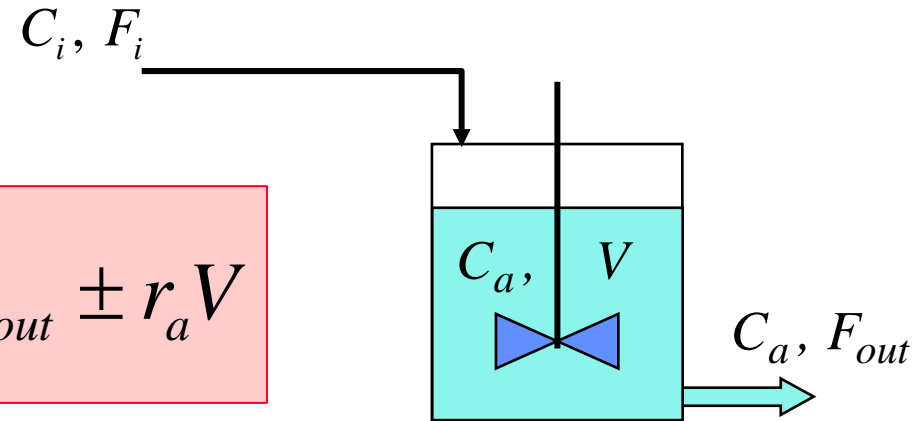


$$\alpha = 1.54422 \times 10^{-4}$$
$$\beta = 1.55$$

Bilanci Fondamentali di Conservazione

- Bilancio di massa per componente

$$\frac{dm_a}{dt} = \frac{d(C_a V)}{dt} = F_i C_i - C_a F_{out} \pm r_a V$$



- m_a = quantità totale di massa del componente 'a' nel sistema
- C_a = concentrazione, espressa in $[M L^{-3}]$
- r_a = rateo specifico di reazione (per unità di volume) per la componente 'a'.
- Si suppone che la concentrazione di uscita coincida con quella nel sistema C_a (*ipotesi di mescolamento completo*)
- Questo bilancio va usato *insieme* al bilancio di massa totale

Dinamica della concentrazione

- Svolgendo il prodotto delle derivate a sinistra

$$\frac{d(C_a V)}{dt} = V \frac{dC_a}{dt} + C_a \frac{dV}{dt} = F_i C_i - F_o C_a \pm r_a V$$

- e ricavando la derivata della concentrazione dC/dt

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V} \left[-C_a \frac{dV}{dt} + F_i C_i - F_o C_a \pm r_a V \right] \quad \frac{dV}{dt} = F_i - F_o$$

- Sostituendo il bilancio di volume dalla prima equazione

$$\begin{aligned} \frac{dC_a}{dt} &= \frac{1}{V} \left[-C_a (F_i - F_o) + F_i C_i - F_o C_a \pm r_a V \right] \\ &= \frac{F_i}{V} (C_i - C_a) \pm r_a \end{aligned}$$

Bilanci dinamici di massa

- Il bilancio totale di massa riguarda tutta la massa del sistema

$$\frac{dV}{dt} = F_i - F_{out}$$

- Esso si riduce ad un bilancio di volume se la densità ρ è costante
- Il bilancio per componente considera la sola sostanza C separatamente

$$\frac{dC_a}{dt} = \frac{F_i}{V} (C_i - C_a) \pm r_a$$

- I due bilanci sono legati dalla variabile “Volume”

Modellare un Sistema Ambientale

- Modellare l'*Ecosistema* soggetto ai forzanti esterni

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u)$$

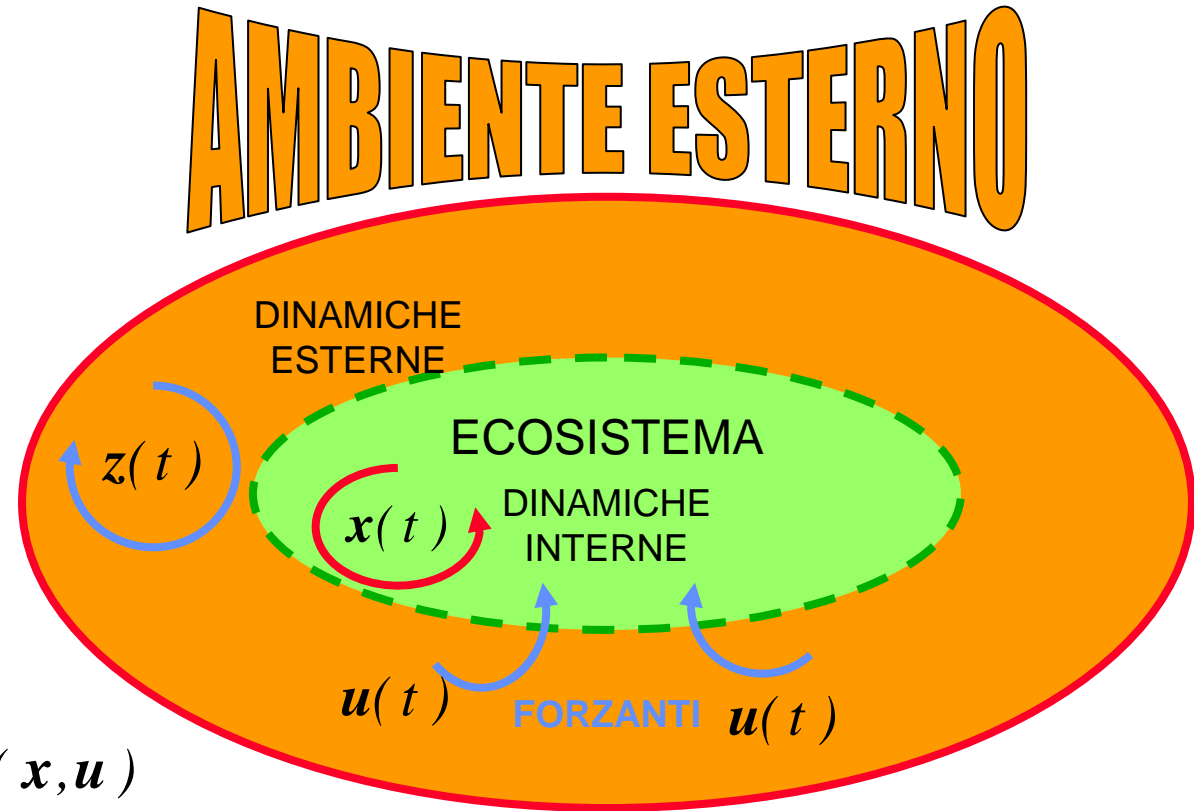
- Chiedersi *cosa* e *come* genera i forzanti u

$$\frac{dz}{dt} = h(z)$$

$$u = f(z)$$

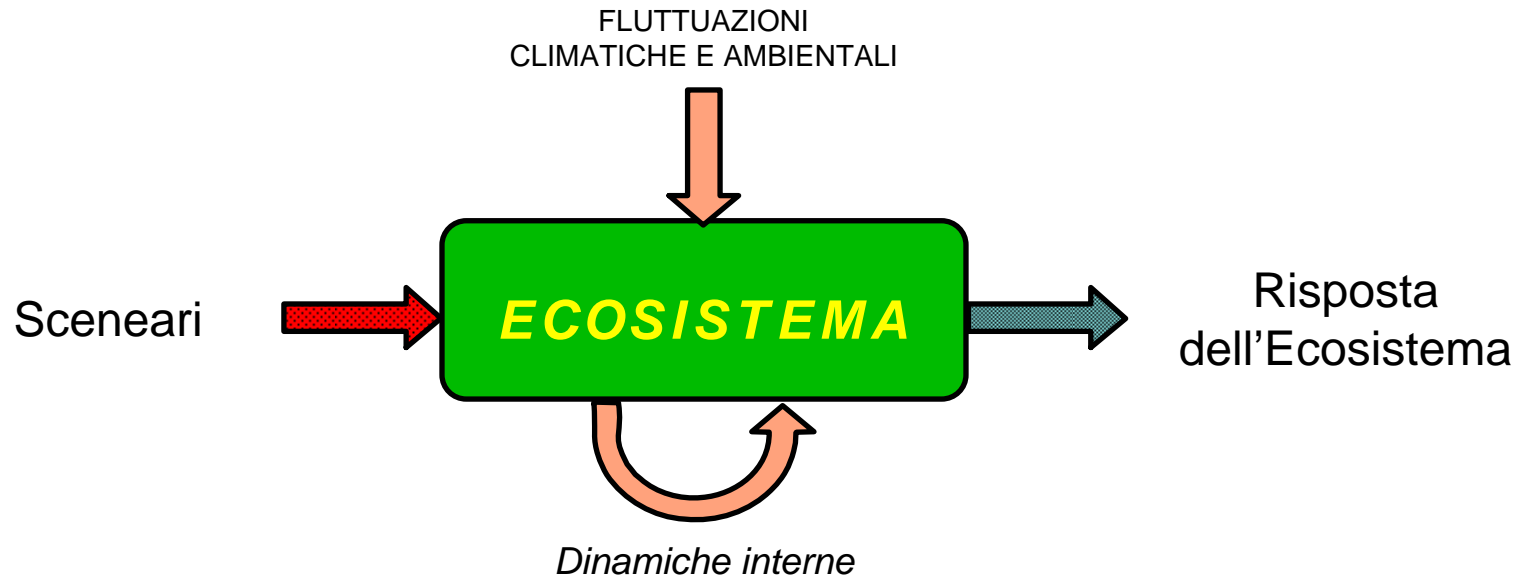
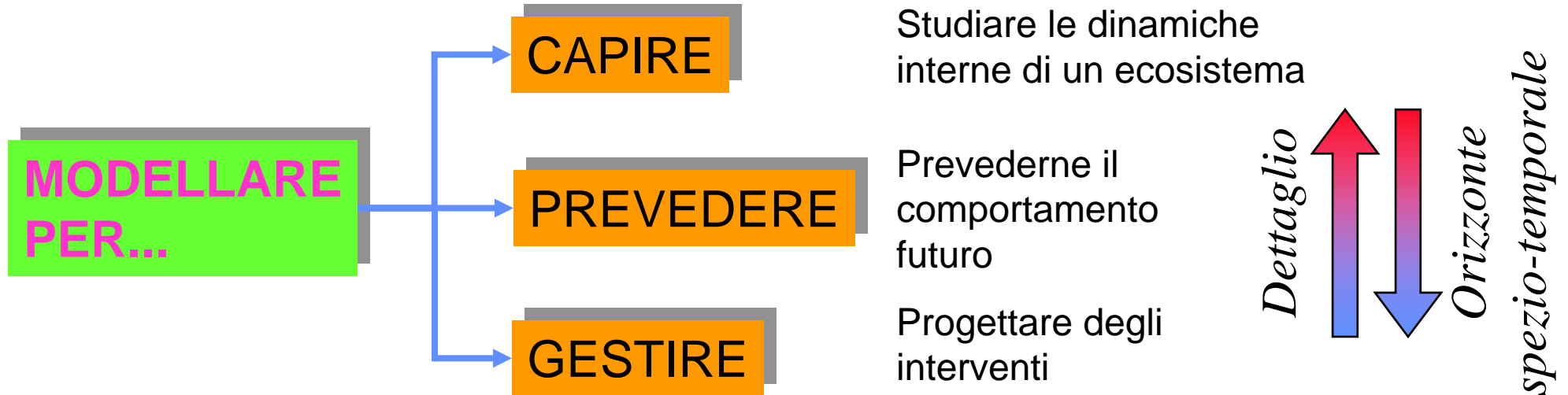
- Modellare l'*Ambiente Esterno* come generatore di forzanti, insieme all'*Ecosistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = g(x, u) \\ \frac{dz}{dt} = h(z) \\ u = f(z) \end{array} \right.$$



Nota: il confine fra Ecosistema ed Ambiente esterno non è sempre facilmente definibile

Usi di un Modello Ambientale



Controllo di un Sistema Ambientale

