Sfruttamento di risorse rinnovabili

Come utilizzare la dinamica di crescita naturale senza provocare danni all’ecosistema

Sfruttamento di risorse rinnovabili

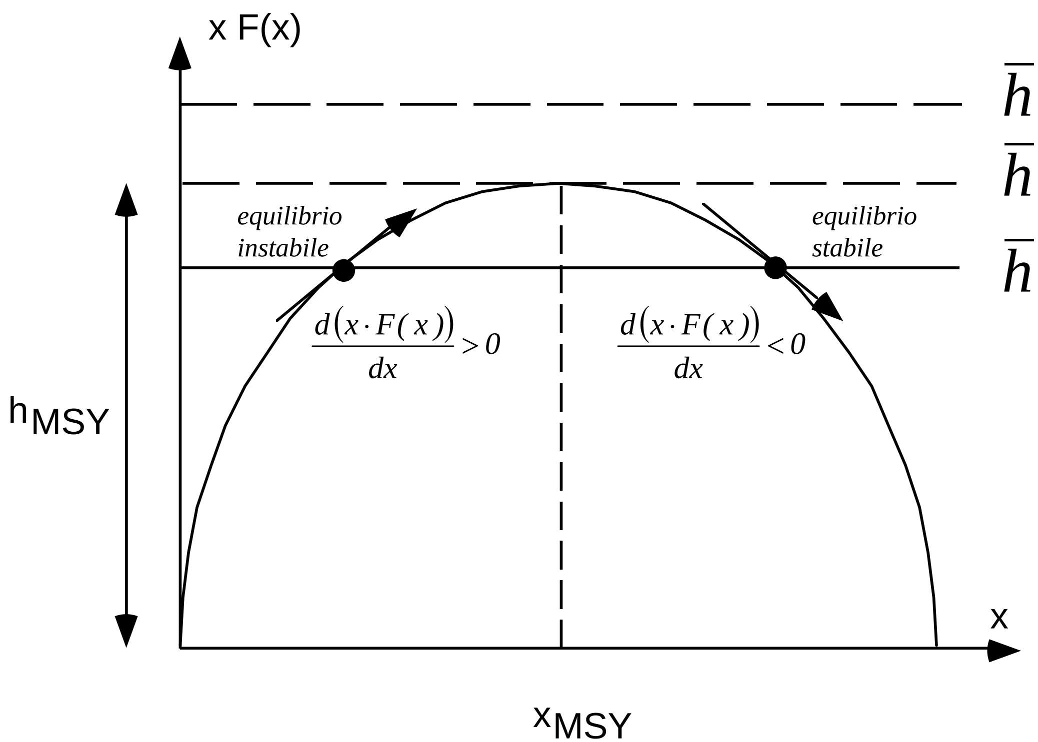
- Strategie per prelevare parte della popolazione, compatibilmente con la sua dinamica di sviluppo, in modo da non pregiudicarne lo sviluppo di lungo termine
- Si suppone che la popolazione si sviluppi con una funzione di crescita *F(x)* “density-dependent”, come nei modelli già visti (es. logistico)
- Anche il prelievo *h(t)* può essere “density-dependent” oppure no
- In genere si trascura la mortalità naturale della popolazione

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{x \cdot F(x)}_{crescita} - \underbrace{h(t)}_{prelievo}$$

- **STABILITA’** = determinare una politica di prelievo che non porta la popolazione all’estinzione

Prelievo costante

- In questo caso *h* = *costante*, indipendentemente dalla popolazione e dal tempo
- Problemi
  - Ricerca dell'equilibrio $x^* F(x^*) = \bar{h}$
  - L'equilibrio è ammissibile? $(x^* > 0)$
  - L'equilibrio è stabile?



$\bar{h} > h_{MSY}$ Sfruttamento non sostenibile

$\bar{h} = h_{MSY}$ Sfruttamento appena sostenibile

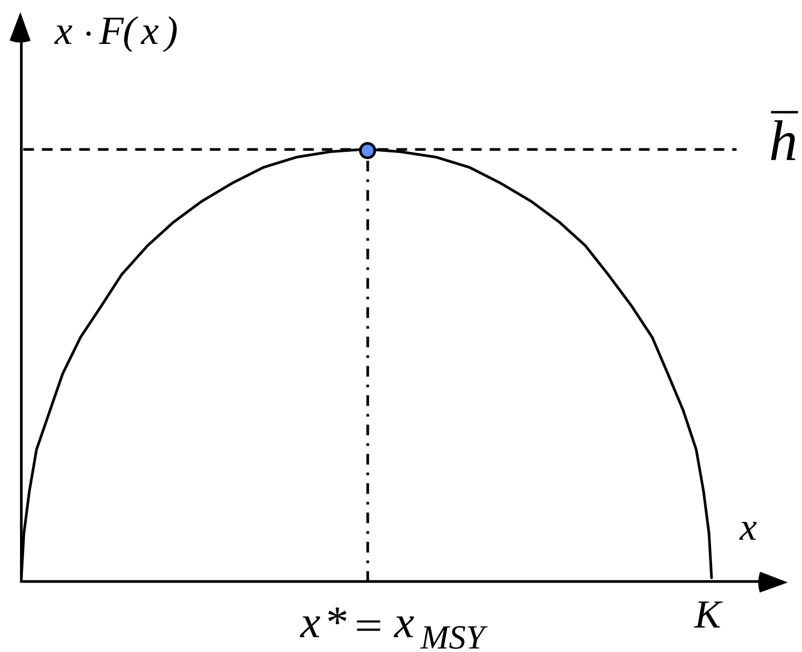
$\bar{h} < h_{MSY}$ Sfruttamento sostenibile

Nel caso sostenibile si hanno due soluzioni. Solamente quella per $x > x_{MSY}$ è stabile (sostenibile)

MSY = Maximum Sustanaible Yield

Maximum Sustainable Yield

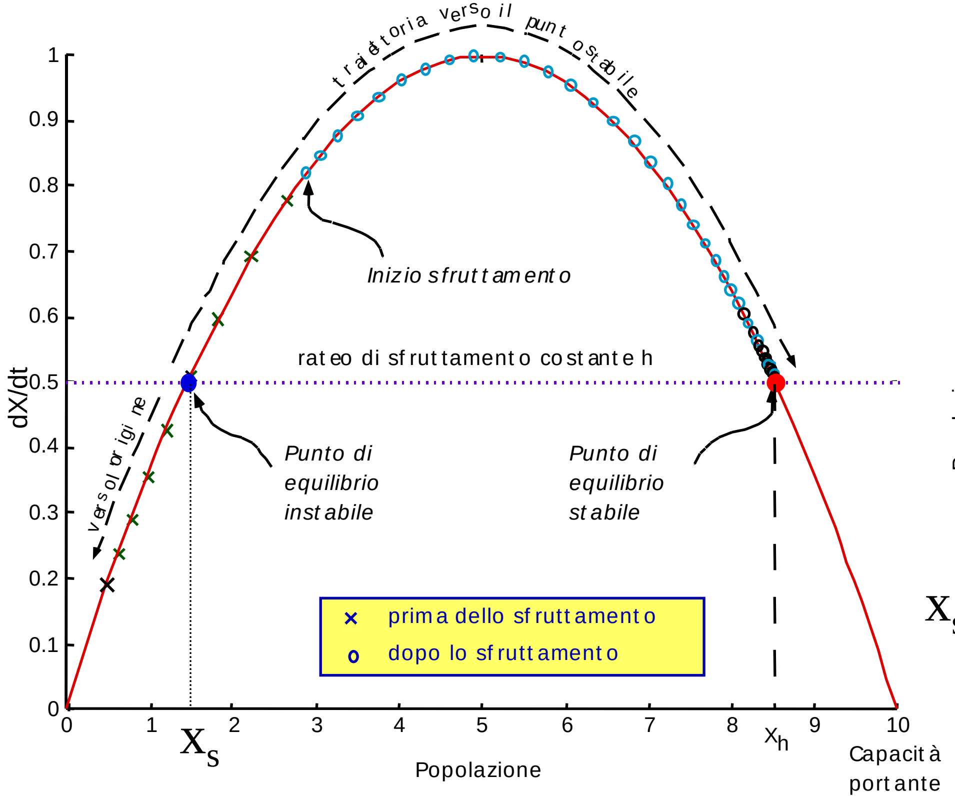
- Il *massimo raccolto sostenibile* (MSY) si ottiene prelevando con un rateo pari al massimo di crescita
- Si determina azzerando la derivata della dinamica totale della popolazione
- Esso corrisponde alla popolazione di massima crescita x*
- Si tratta di un limite teorico, in quanto produce un equilibrio *metastabile*

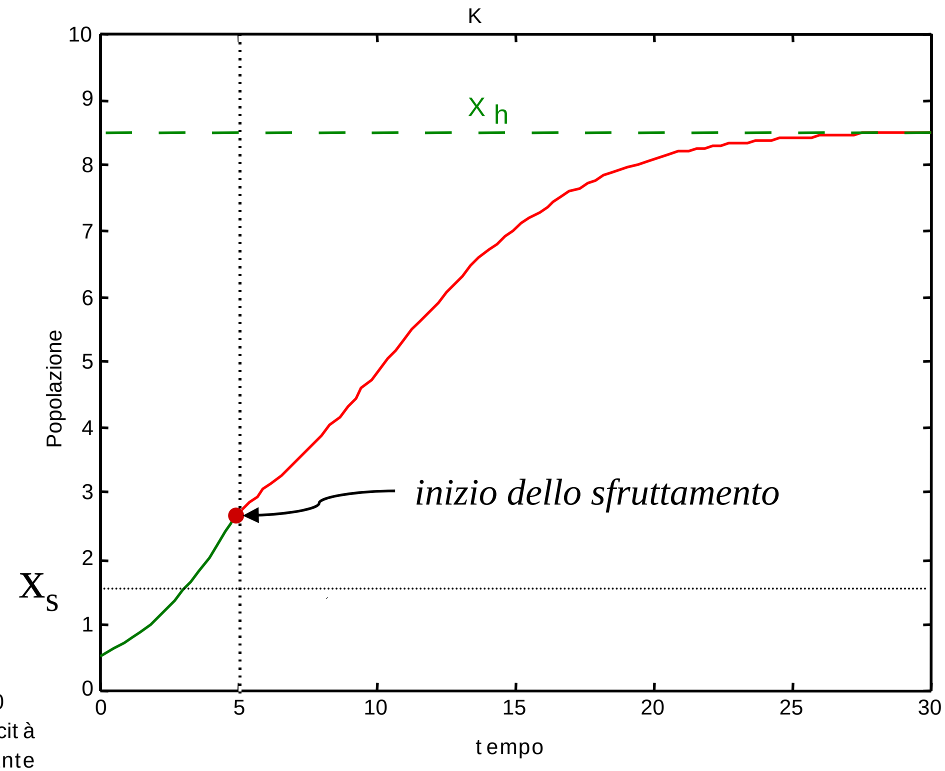


$$\bar{h}_{MSY} = x^* \cdot F(x^*)$$

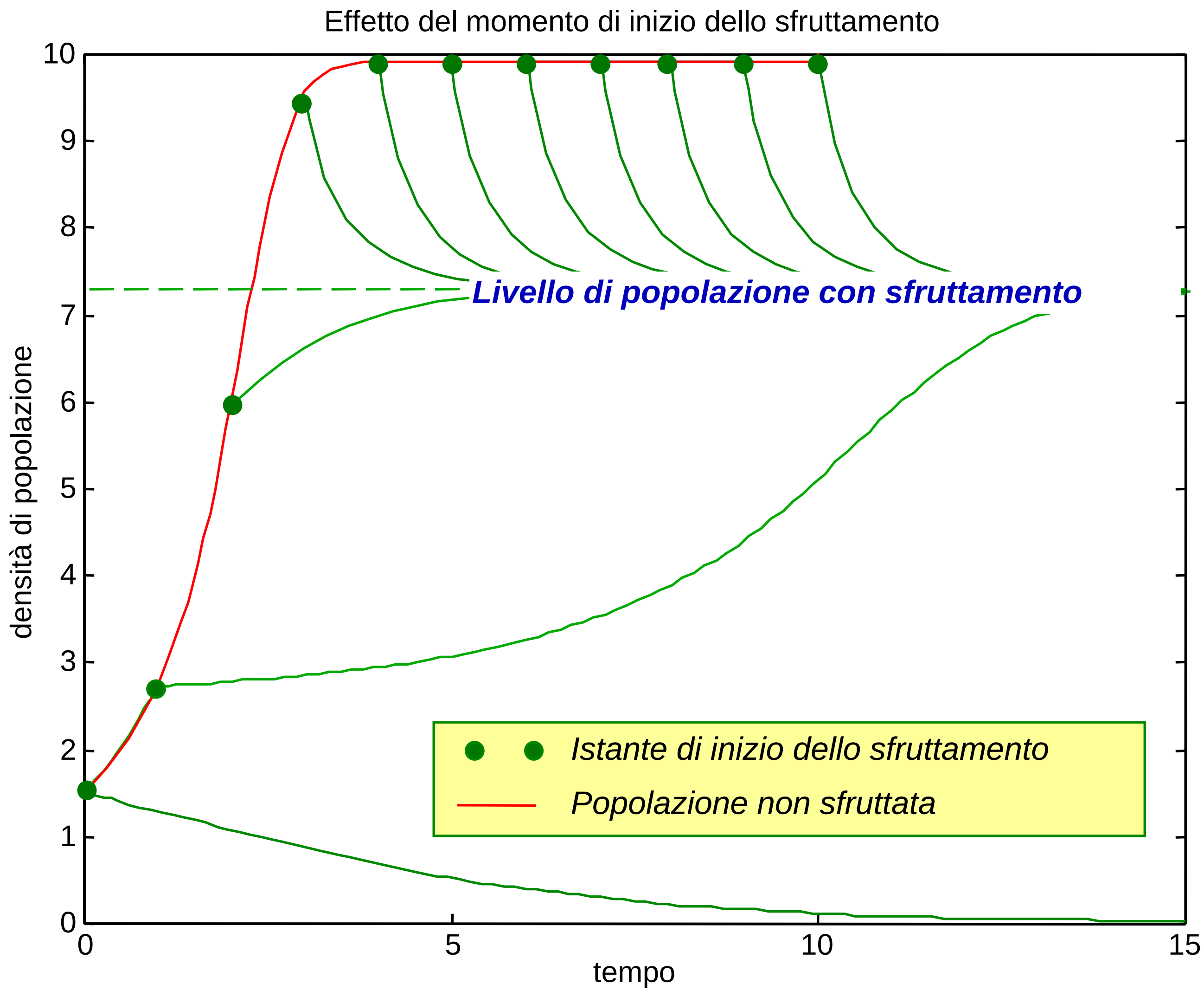
Sfruttamento costante

Il punto di equilibrio a cui tende la popolazione dipende dalla densità al momento dell’inizio del prelievo: se si inizia lo sfruttamento quando x(t) è inferiore al valore di equilibrio instabile x_s, la popolazione si estingue





Sviluppo con sfruttamento



Sfruttamento costante nel caso logistico

- Si assume una *crescita logistica* come dinamica di sviluppo

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \left[1 - \frac{x}{K} \right] - \bar{h}$$

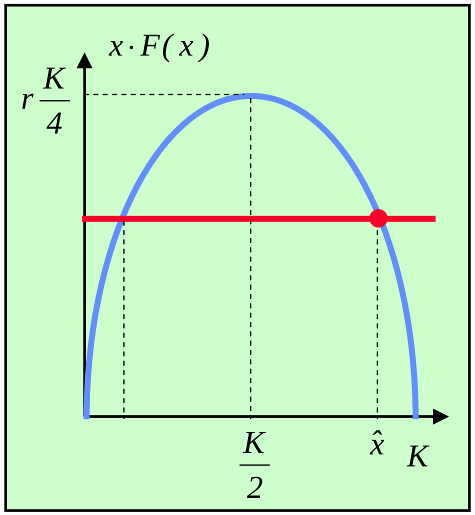
- Il massimo raccolto sostenibile (MSY) si ha per

$$x^* = x_{MSY} = \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{h}_{MSY} = rx^* \left[1 - \frac{x^*}{K} \right] = r\frac{K}{2}\left[1 - \frac{K}{2K} \right] = r\frac{K}{4}$$

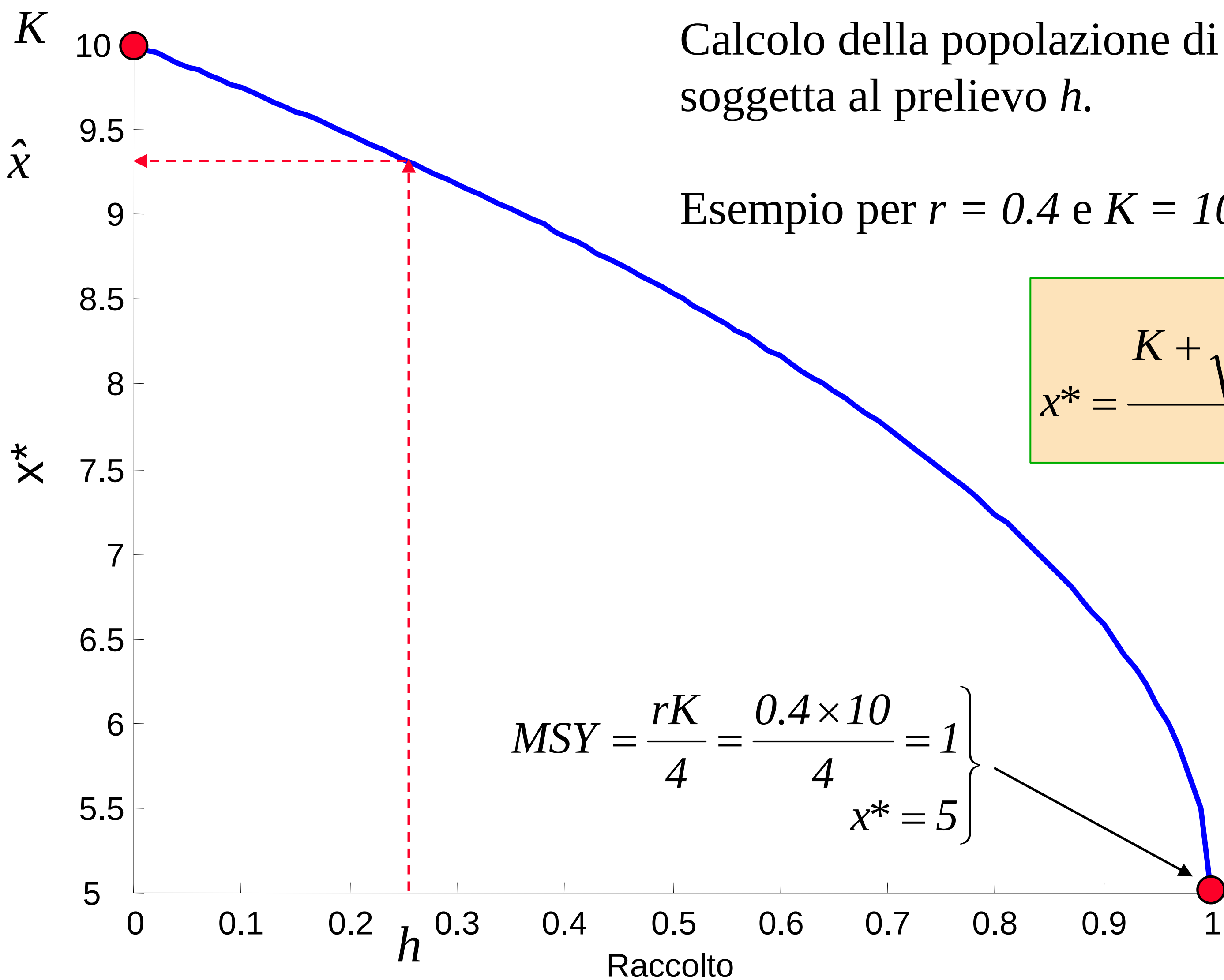
- Sfruttamento ammissibile per $h < h_{MSY}$

$$0 = rx\left[1 - \frac{x}{K} \right] - h \quad \Rightarrow \quad x^2 - Kx + \frac{Kh}{r} = 0$$

$$\hat{x} = \frac{K + \sqrt{K^2 - 4\frac{Kh}{r}}}{2} > \frac{K}{2} \quad per\, x > \frac{K}{2} \Rightarrow h < h_{MSY}$$



Equilibrio a sfruttamento costante



Calcolo della popolazione di equilibrio x* soggetta al prelievo *h*.

Esempio per $r = 0.4$ e $K = 10$

$$x^* = \frac{K + \sqrt{K^2 - 4\frac{Kh}{r}}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} MSY &= \frac{rK}{4} = \frac{0.4 \times 10}{4} = 1 \\ x^* &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Sfruttamento costante sostenibile

- Se lo sfruttamento è inferiore a h_{MSY}, si hanno due equilibri, separati da x_{MSY}

$$x_1 < x_{MSY} < x_2$$

- L'equilibrio instabile (x_1) è un *repulsore* e respinge le traiettorie
  - verso l'origine (estinzione) se all'inizio dello sfruttamento la popolazione si trovava ad un livello inferiore di x_1
  - verso l'equilibrio stabile (x_2) se all'inizio dello sfruttamento la popolazione si trovava ad un livello superiore di x_1
- L'equilibrio stabile (x_2) è un *attrattore* per tutte le traiettorie originate da popolazioni iniziali superiori a x_1

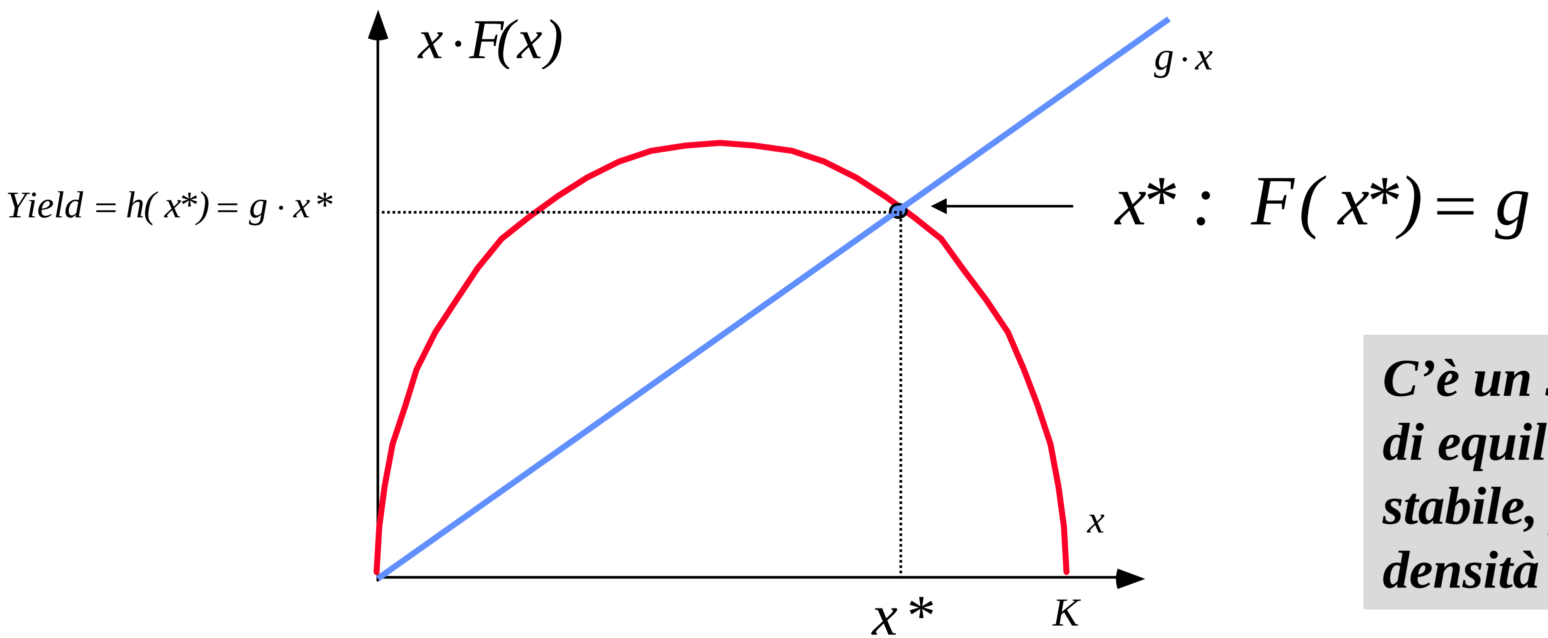
$$h < h_{MSY} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 < x_{MSY} & \text{Instabile, respinge tutte le traiettorie} \\ x_2 > x_{MSY} & \text{Stabile, attira le traiettorie per } \forall x_o > x_1 \end{cases}$$

Sfruttamento proporzionale

- Lo sfruttamento è proporzionale alla densità di popolazione attuale

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{r \cdot x \cdot \left[1 - \frac{x}{K}\right]}_{\text{crescita logistica}} - \underbrace{g \cdot x}_{\text{sfruttamento proporzionale}}$$

Problema: *è necessario conoscere la consistenza della popolazione ad ogni istante t*



C'è un solo punto di equilibrio ed è stabile, per qualsiasi densità di popolazione

Stabilità dell'equilibrio nel prelievo proporzionale

- Cerchiamo il punto di equilibrio

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot F(x) - g \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x^*) = g \quad \Rightarrow \quad x^* = F^{-1}(g)$$

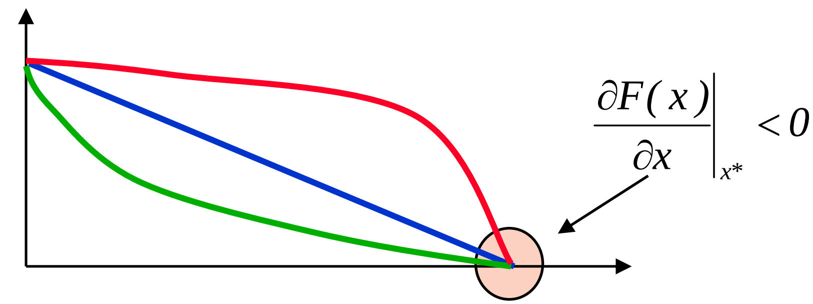
- Per la stabilità, al punto di equilibrio la derivata totale del rateo della popolazione dovrà essere negativo

$$F(x^*) - g = 0$$

$$\frac{\partial \left(x \cdot F(x) - g \cdot x \right)}{\partial x} = F(x^*) + x^* \cdot \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x^*} - g < 0$$

- Dato che è sicuramente x* > 0, dovrà essere

$$\boxed{\left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x^*} < 0}$$



- Ma questa era una delle condizioni necessarie perché *F(x)* sia una funzione di crescita, perciò è sicuramente verificata ⇒ ***il prelievo proporzionale è sempre stabile per funzioni di crescita ammissibili <u>(non depensate)</u>***

Sfruttamento proporzionale della Logistica

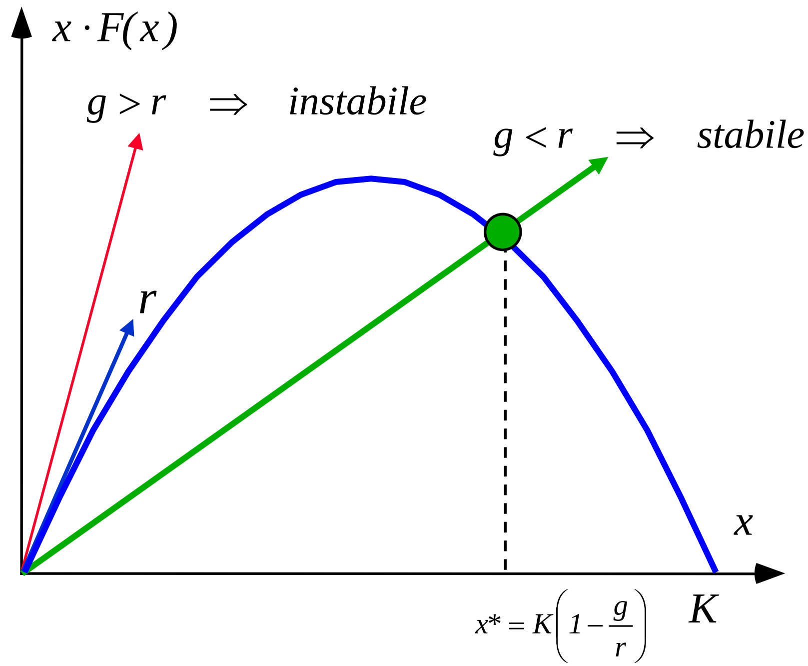
- Punto di equilibrio $\quad r\left(1-\dfrac{x}{K}\right)=g \quad \Rightarrow \quad x^*=K\left(1-\dfrac{g}{r}\right)$

- Condizione di stabilità $\quad \dfrac{dF}{dx}<0 \quad \Rightarrow \quad r>g \quad$ infatti

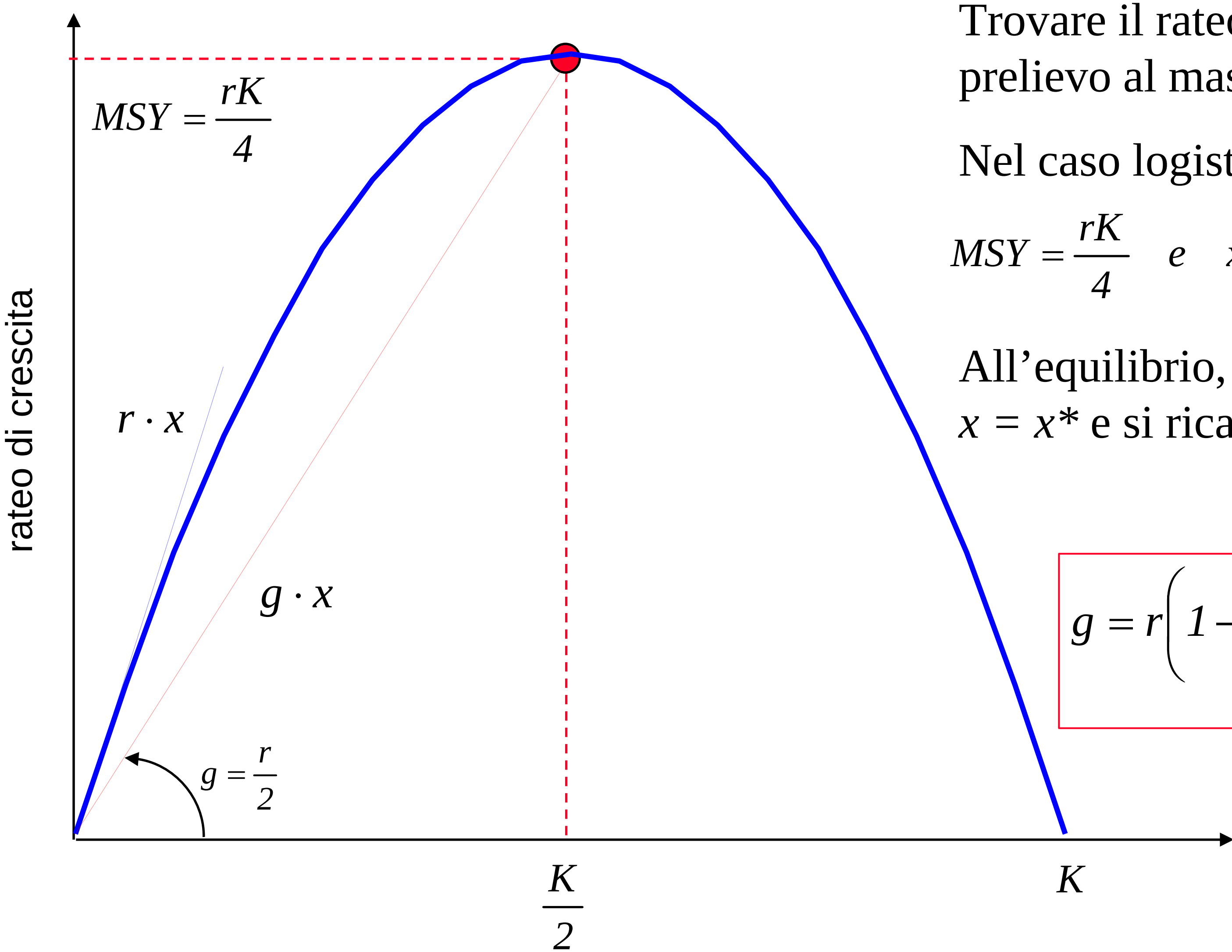
$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*}=\frac{\partial}{\partial x}\left[rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-gx\right]\Bigg|_{x^*}=r\left(1-\frac{2x^*}{K}\right)-g$$

$$=r\left(1-\frac{2K\left(1-\dfrac{g}{r}\right)}{K}\right)-g=r\left(1-2\left(1-\frac{g}{r}\right)\right)-g$$

$$=r-2r+2g-g \;=-r+g<0 \;\Rightarrow\; r>g$$



Sfruttamento al massimo livello (MSY) logistico



Trovare il rateo g_{MSY} che realizza il prelievo al massimo livello di crescita

Nel caso logistico si sa che

$$MSY = \frac{rK}{4} \quad e \quad x^* = \frac{K}{2}$$

All'equilibrio, si sostituisce $x = x^*$ e si ricava g_{MSY}

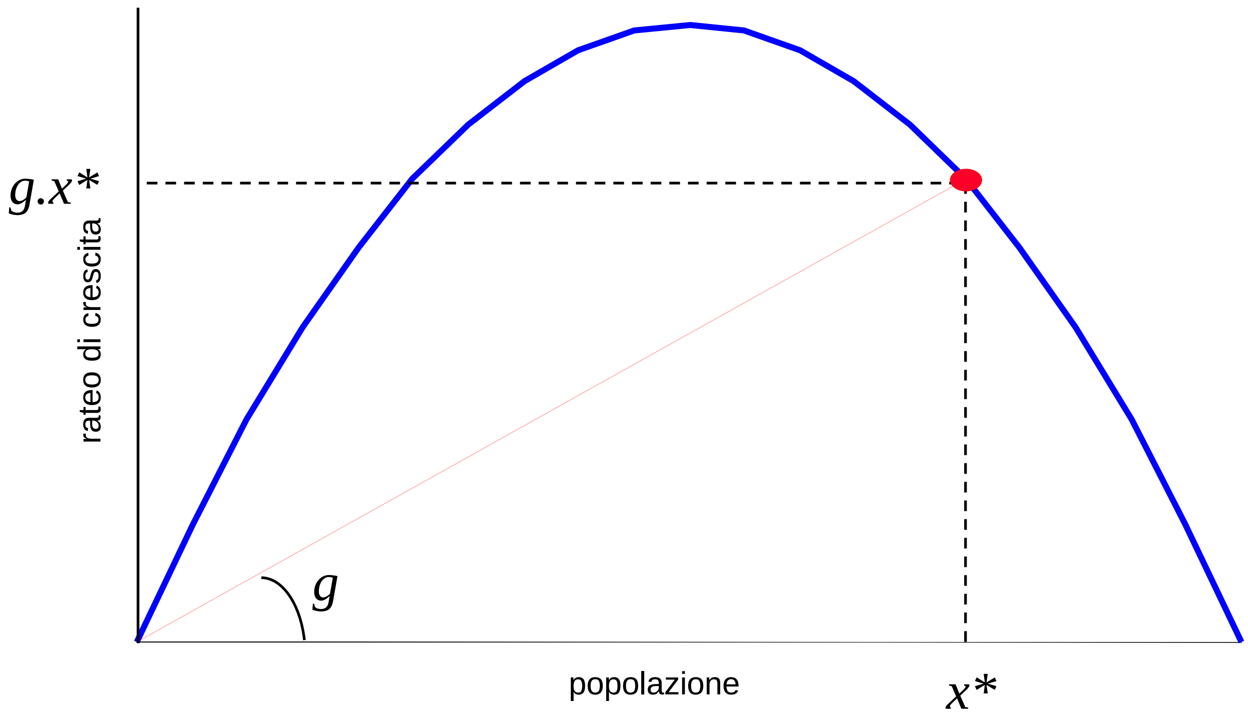
$$\boxed{g = r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right)_{x^* = \frac{K}{2}} \Rightarrow g_{MSY} = \frac{r}{2}}$$

Sfruttamento ad un generico livello

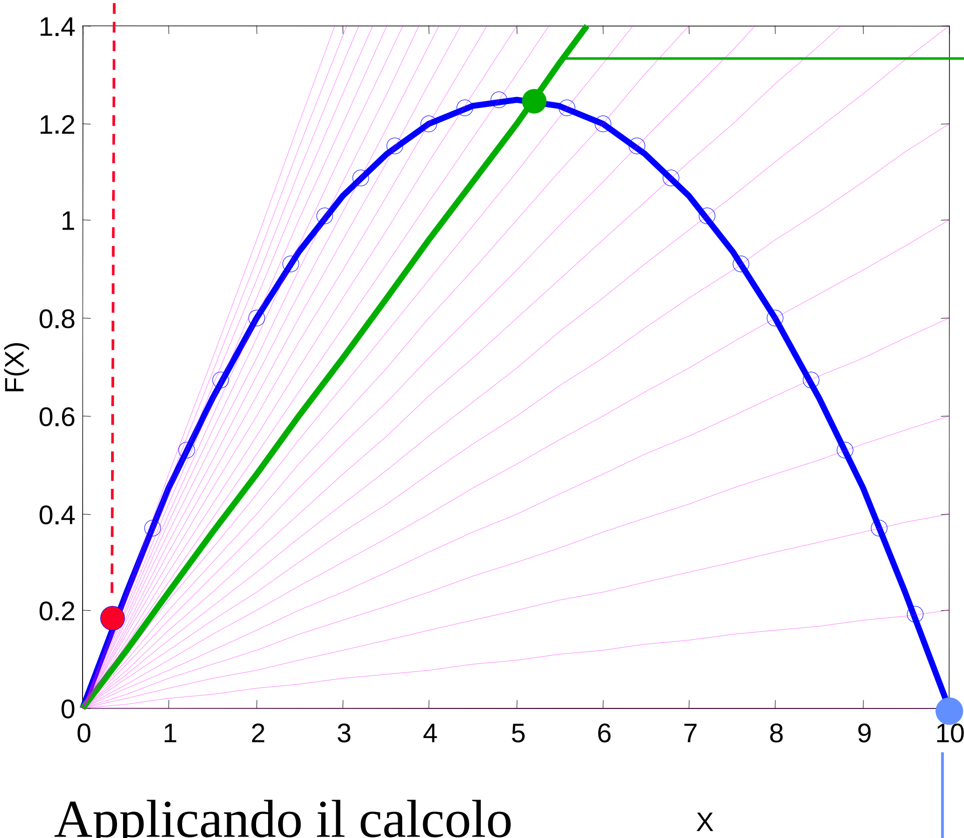
- Fissato il livello di prelievo g si ricava la popolazione stazionaria per quel prelievo

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right)=gx \quad \Rightarrow x^{*}=K\left(1-\frac{g}{r}\right)$$

- Il raccolto ottenuto con questo valore di g è dato da $x^{*}.g$



Equilibri dello sfruttamento proporzionale

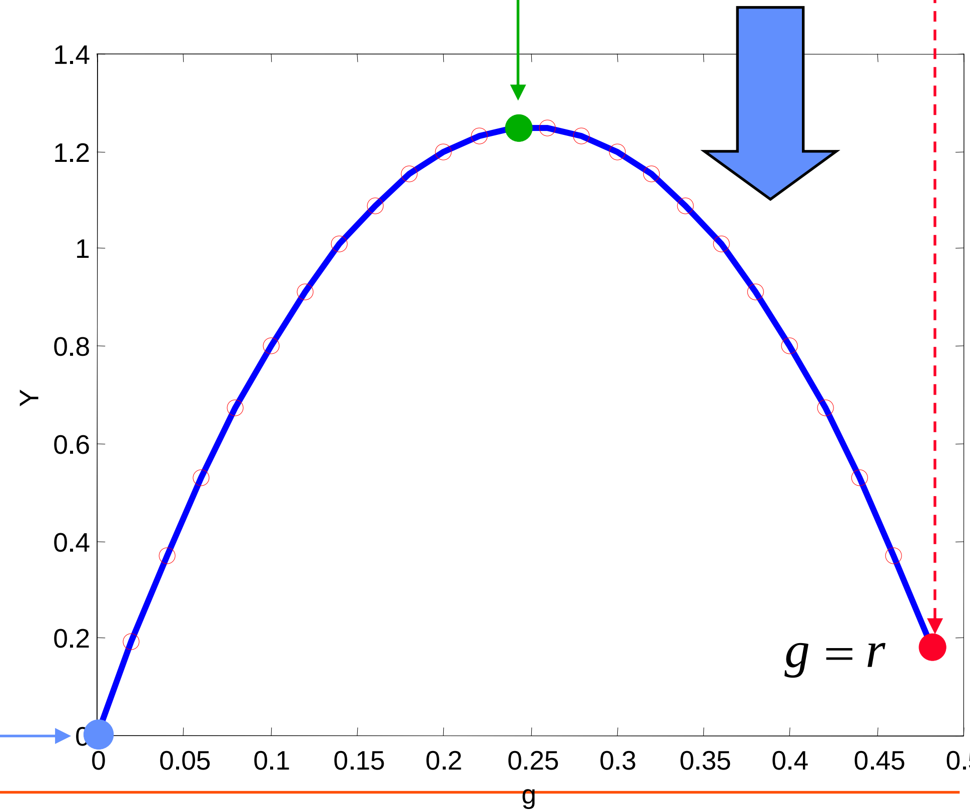


Questo rateo di prelievo fornisce il massimo raccolto $g_{MSY} = r/2$

I ratei superiori a g_{MSY} forniscono un raccolto minore

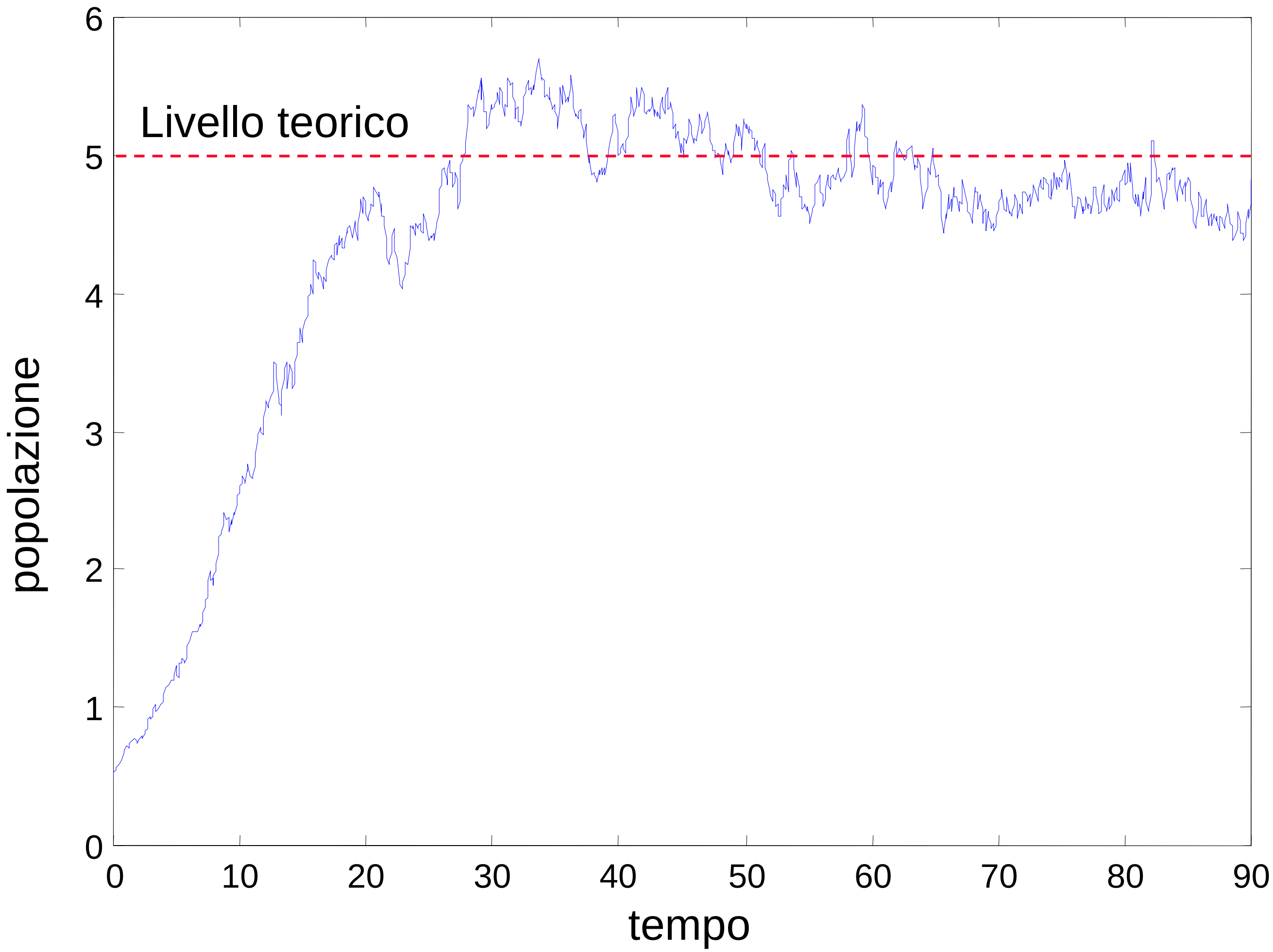
Applicando il calcolo precedente a tutti i valori di g ammissibili $g \in (0,r)$ si ottiene la curva dei ricavi

$$g = 0 \Rightarrow x^* = K$$



$$g = r$$

Robustezza del prelievo proporzionale



Il prelievo proporzionale, finché soddisfa alla condizione di stabilità (g < r), è ***robusto*** nei confronti della variabilità demografica.

Nota: il prelievo costante non lo è!

In questa simulazione la variabilità demografica su r ha varianza pari a r/4.

Bibliografia

- Clark. C.W., *Mathematical Bioeconomics: the optimal management of renewable resources*, Wiley, 1990.
- Starfield, A.M. and Bleloch A.L., *Building Models for Conservation and Wildlife Management*, MacMillan, 1986.
- Grant W.E., *System Analysis and Simulation in Wildlife and Fisheries Sciences*, Wiley, 1986.
- Saila S.B., Recksiek C.W., Prager M.H., *Basic Fishery Science Program*, Elsevier, 1988.
- Jacobs O.R.L., Ballance D.J., Horwood J.W. "Fishery management as a problem in feedback control", *Automatica*, **27** (4): 627 - 639 (1991).
- Nguyen Phong Chau, "Destabilising effect of periodic harvest on population dynamics", *Ecological Modelling,* **127**: 1–9 (2000).